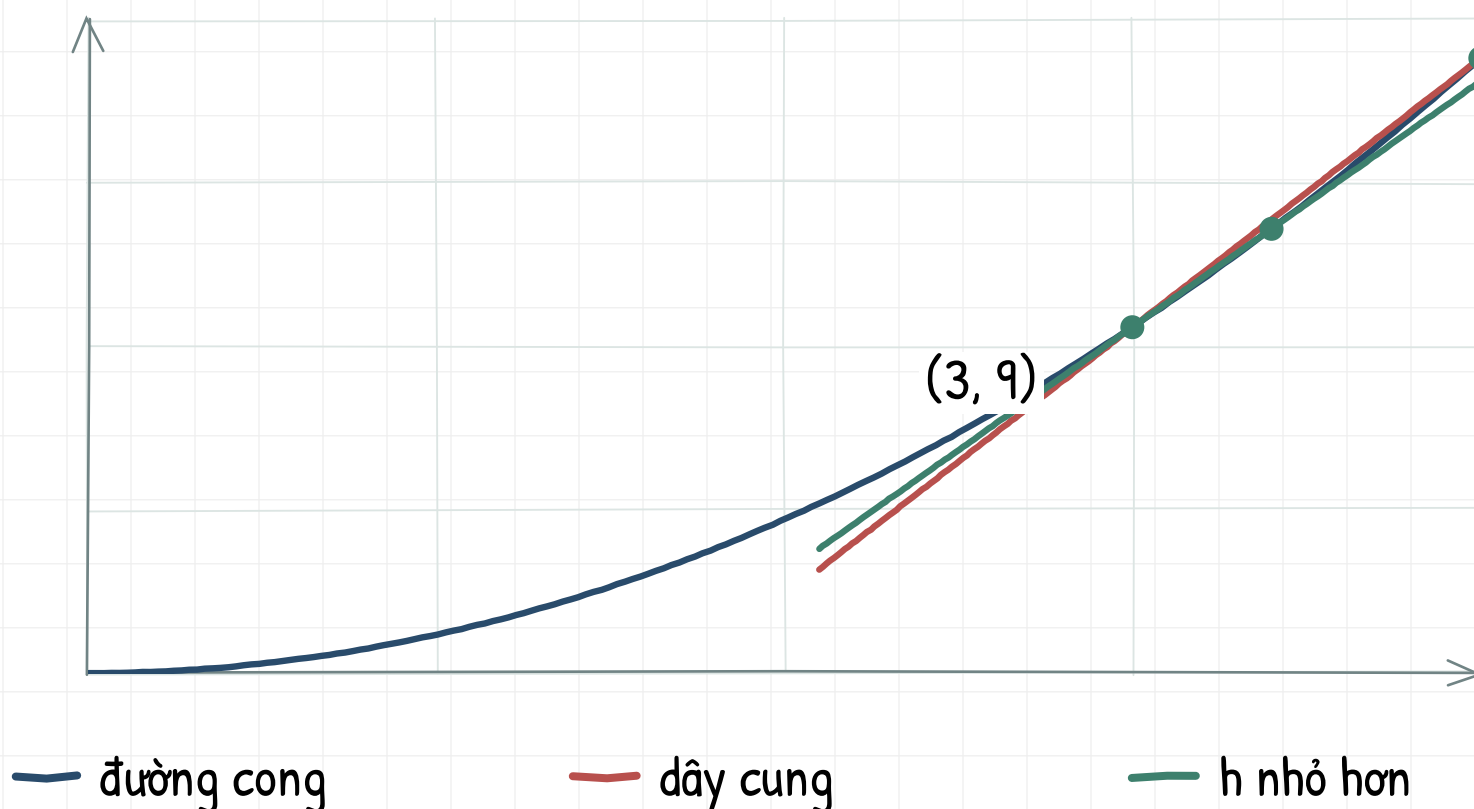


Từ hai điểm đến một điểm

Kéo điểm thứ hai về sát điểm đầu: dây cung tiến gần tiếp tuyến.



Từ hình đến công thức

Độ dốc trung bình = $\Delta y / \Delta x = [f(x+h) - f(x)] / h$.

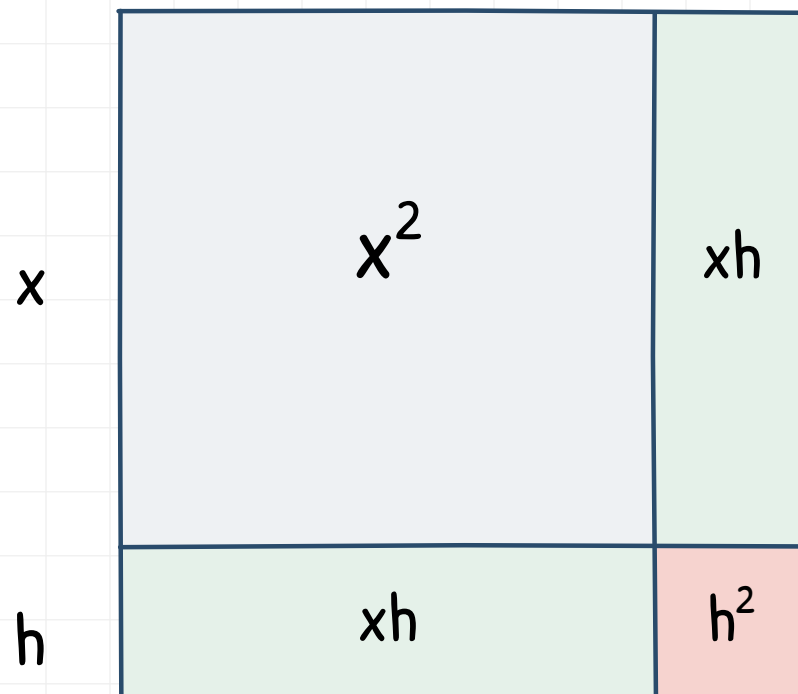
Cho h tiến về 0, nếu giới hạn tồn tại: $f'(x) = \lim [f(x+h) - f(x)] / h$.

Với $f(x) = x^2$ tại $x = 3$: thương số = $6 + h \rightarrow 6$.

Đạo hàm đo tốc độ thay đổi ngay tại một điểm.

Hai dải dài, một góc nhỏ

Tăng cạnh hình vuông từ x lên $x+h$. Phần diện tích thêm nằm ở đâu?



Từ hình đến công thức

Diện tích thêm: $(x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2$.

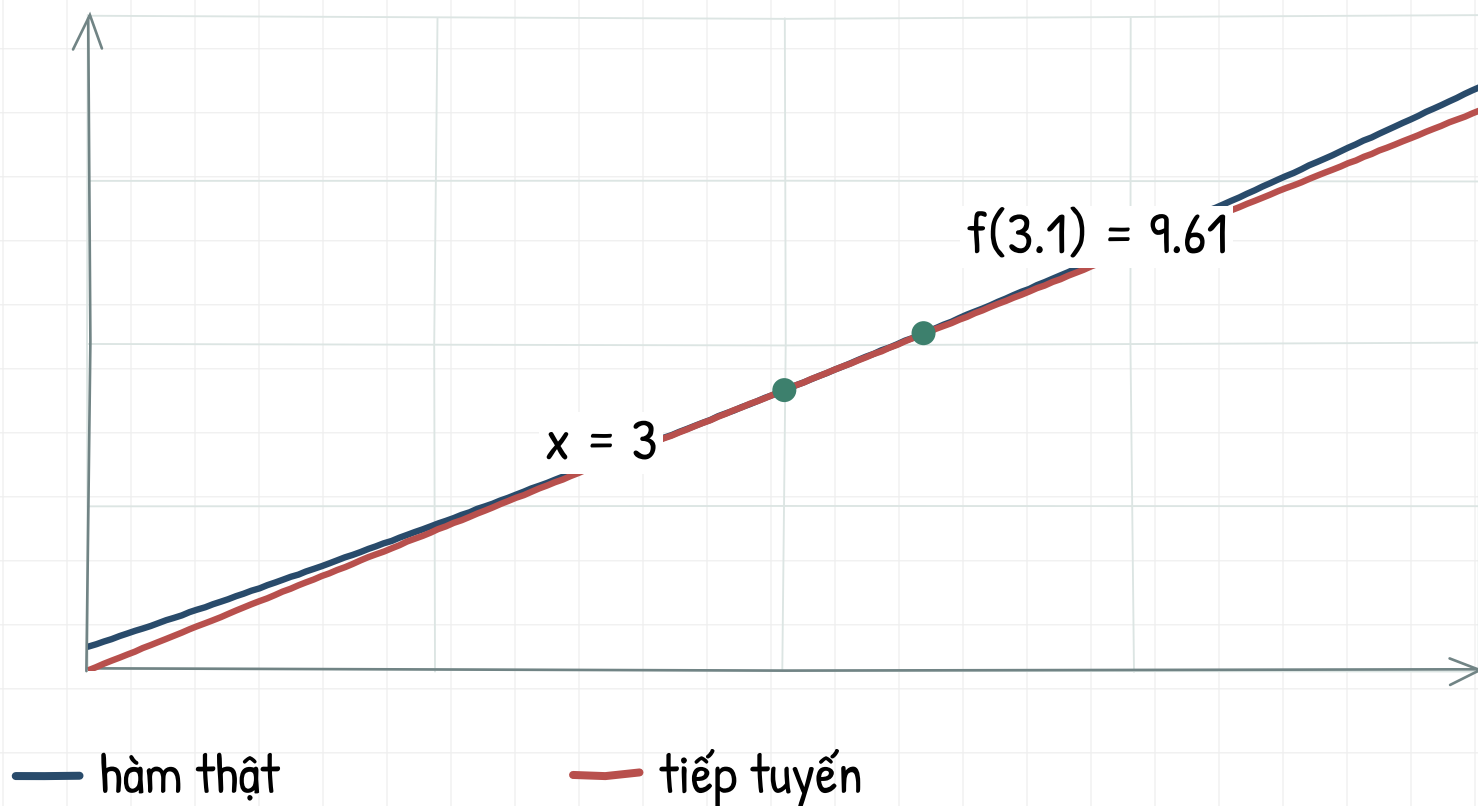
Chia cho h : mỗi đơn vị tăng cạnh thêm $2x + h$ diện tích.

Khi $h \rightarrow 0$, góc h^2 đóng góp $h \rightarrow 0$. Còn lại: $(x^2)' = 2x$.

Số 2 đến từ hai dải diện tích xh .

Phóng to: gần như đường thẳng

Tiếp tuyến là mô hình tuyến tính tại điểm đang đứng.



Từ hình đến công thức

$f(x+h) \approx f(x) + f'(x) \cdot h$, với h đủ nhỏ.

Tại $x = 3$: $f(3.1) \approx 9 + 6 \cdot 0.1 = 9.60$.

Giá trị thật là 9.61; phần bỏ qua là $h^2 = 0.01$. Xa điểm chạm, sai số tăng.

Đạo hàm cho mô hình địa phương; không mô tả cả đường cong.

Quy tắc tích từ hình chữ nhật

Nếu cả chiều dài lẫn chiều rộng đều đổi, mỗi chiều góp một phần.

$u \cdot v$	$v \cdot du$
$u \cdot dv$	$du \cdot dv$

tăng cả hai cạnh $\rightarrow$ cộng cả hai dải

Từ hình đến công thức

$d(uv) \approx v \cdot du + u \cdot dv$; phần $du \cdot dv$ nhỏ bậc hai.

Chia cho dx rồi lấy giới hạn: $(uv)' = u'v + uv'$.

$u = 2x+1$, $v = x^2$, tại $x=2$: $u'v + uv' = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 28$.

Không có quy tắc $(uv)' = u'v'$.

Gom các quy tắc cơ bản

Từ diện tích đến thể tích: x^3 có ba mặt chính cùng nở ra.

Hàm	Đạo hàm	Nhìn bằng hình
c	0	đường ngang
x^2	$2x$	hai dải
x^3	$3x^2$	ba mặt
$u+v$	$u'+v'$	cộng độ thay đổi

Từ hình đến công thức

Với n nguyên dương: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

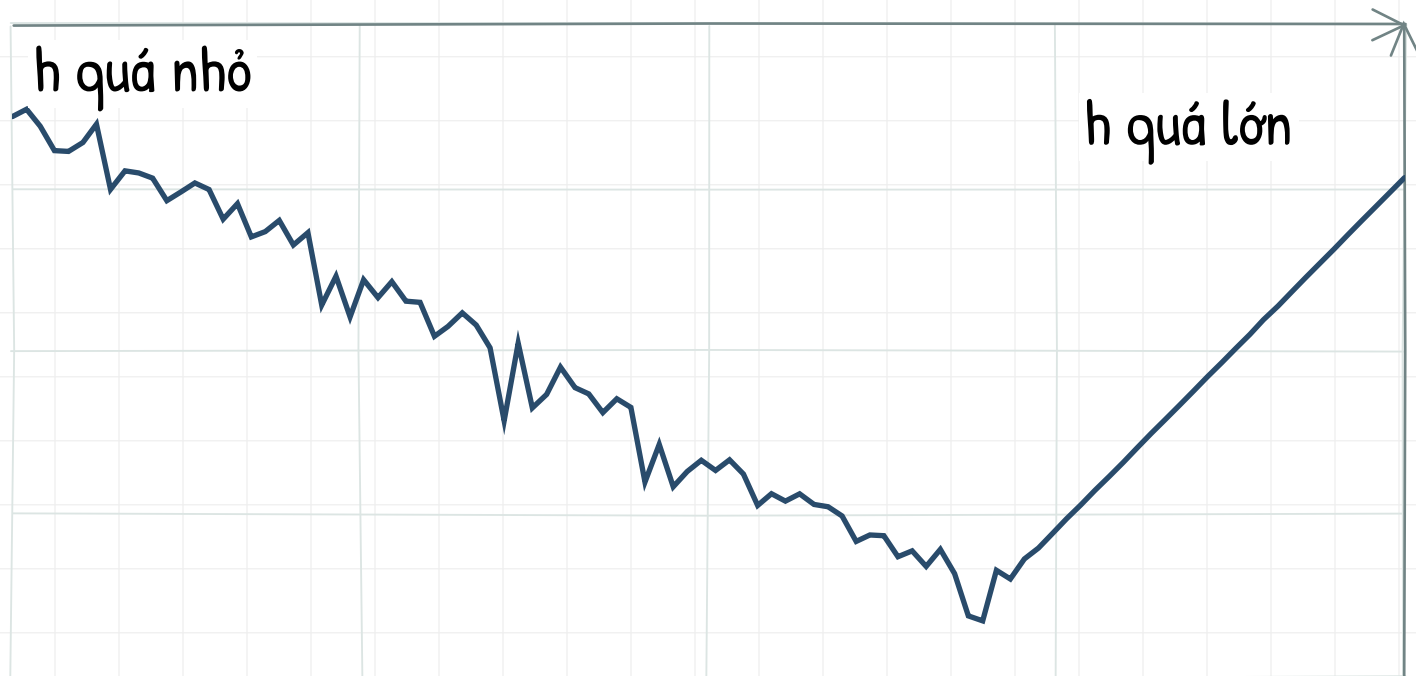
Nhân hằng số giữ nguyên hệ số: $(c \cdot f)' = c \cdot f'$.

Ví dụ $f(x) = x^4 - 2x$: $f'(3) = 4 \cdot 3^3 - 2 = 106$.

Nhớ cơ chế tạo ra quy tắc trước khi dùng công thức.

Máy tính không lấy h bằng 0

Đồ thị sai số thực của sai phân trung tâm cho $\sin(x)$ tại $x=1$.



— trục ngang: $\log_{10} h$

— dọc: $\log_{10}$ sai số

Từ hình đến công thức

Sai phân tiến: $[f(x+h) - f(x)] / h$; sai số cắt cụt thường $O(h)$.

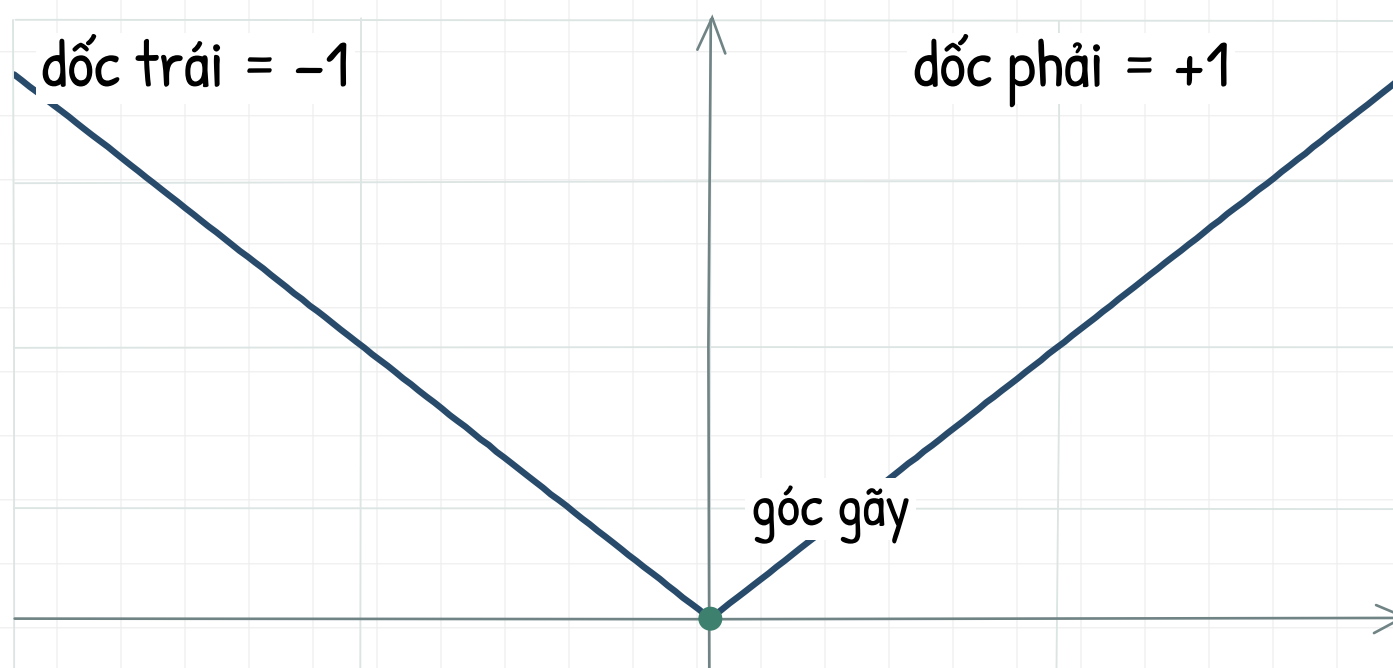
Trung tâm: $[f(x+h) - f(x-h)] / (2h)$; thường $O(h^2)$ khi đủ trơn.

h quá nhỏ: trừ hai số gần nhau rồi chia h làm sai số làm tròn nổi lên.

Quét vài h và kiểm độ ổn định; h nhỏ nhất chưa chắc tốt nhất.

Góc gãy không có tiếp tuyến

Tại $x=0$ của $|x|$, đi đến từ hai phía cho hai độ dốc khác nhau.



— $f(x) = |x|$

Từ hình đến công thức

Đạo hàm tồn tại khi giới hạn trái và phải bằng nhau.

$|x|$ tại 0: bên trái -1, bên phải +1 $\rightarrow$ không có đạo hàm.

Sai phân trung tâm vẫn cho 0! Một con số từ máy không chứng minh hàm khả vi.

ReLU tại 0 cũng là góc gãy; backward phải dùng quy ước.

Tự kiểm trước khi đi tiếp

Che đáp án, thử nói bằng lời

1. Vì sao $(x^2)'$ có hệ số 2?
2. Tiếp tuyến x^2 tại 3 dự đoán $f(3.1)$ bao nhiêu?
3. Đạo hàm $(2x+1)x^2$ tại 2?
4. Vì sao h quá nhỏ có thể làm sai hơn?
5. Trung tâm của $|x|$ tại 0 cho 0, vậy có đạo hàm?

Đáp nhanh

1. Hai dải xh ; góc h^2 biến mất sau khi chia h rồi lấy giới hạn.
2. 9.60; thật 9.61, lệch 0.01.
3. 28: cộng hai phần $8 + 20$.
4. Triệt tiêu và làm tròn; có khi máy lưu $x+h$ đúng bằng x .
5. Không: hai đạo hàm một phía là -1 và $+1$.