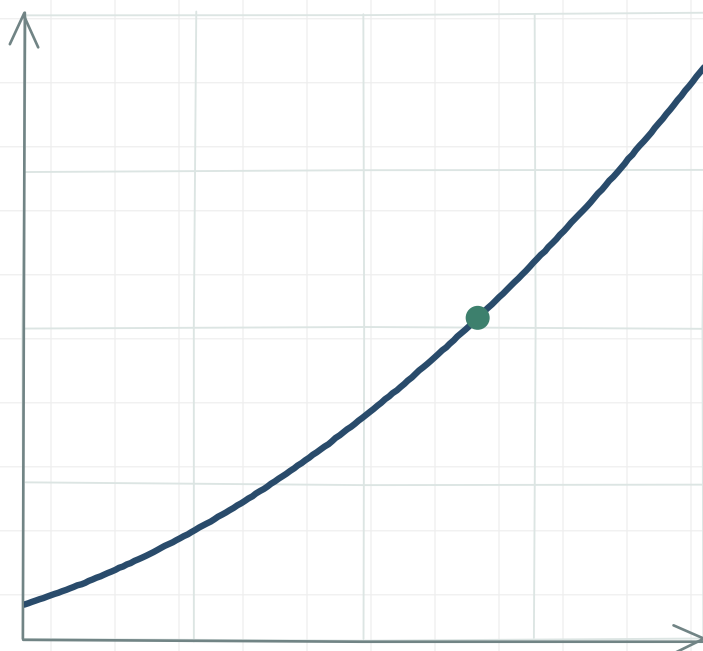


Cắt bề mặt theo từng hướng

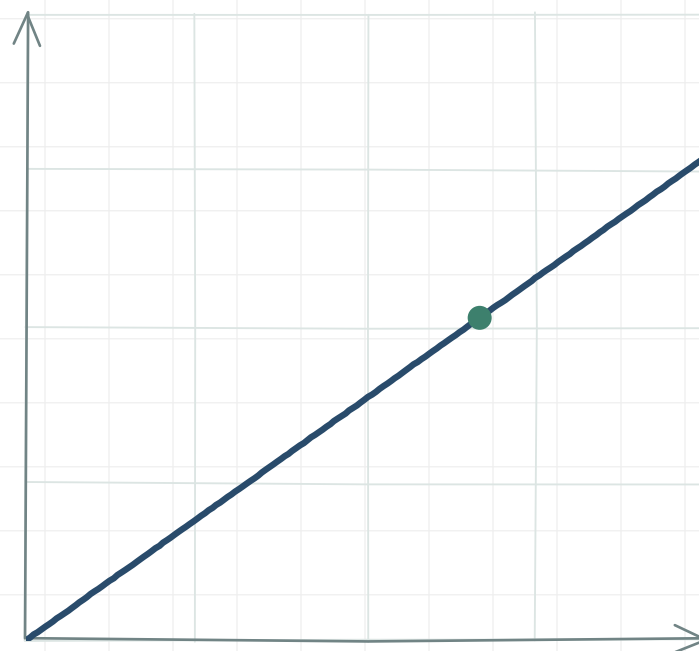
$f(x,y)=x^2y$ tại $(3,2)$: mỗi lần giữ một biến đứng yên.

giữ $y=2$: $2x^2$



dốc = 12

giữ $x=3$: $9y$



dốc = 9

Từ hình đến công thức

$$\partial f / \partial x = 2xy = 12; \partial f / \partial y = x^2 = 9.$$

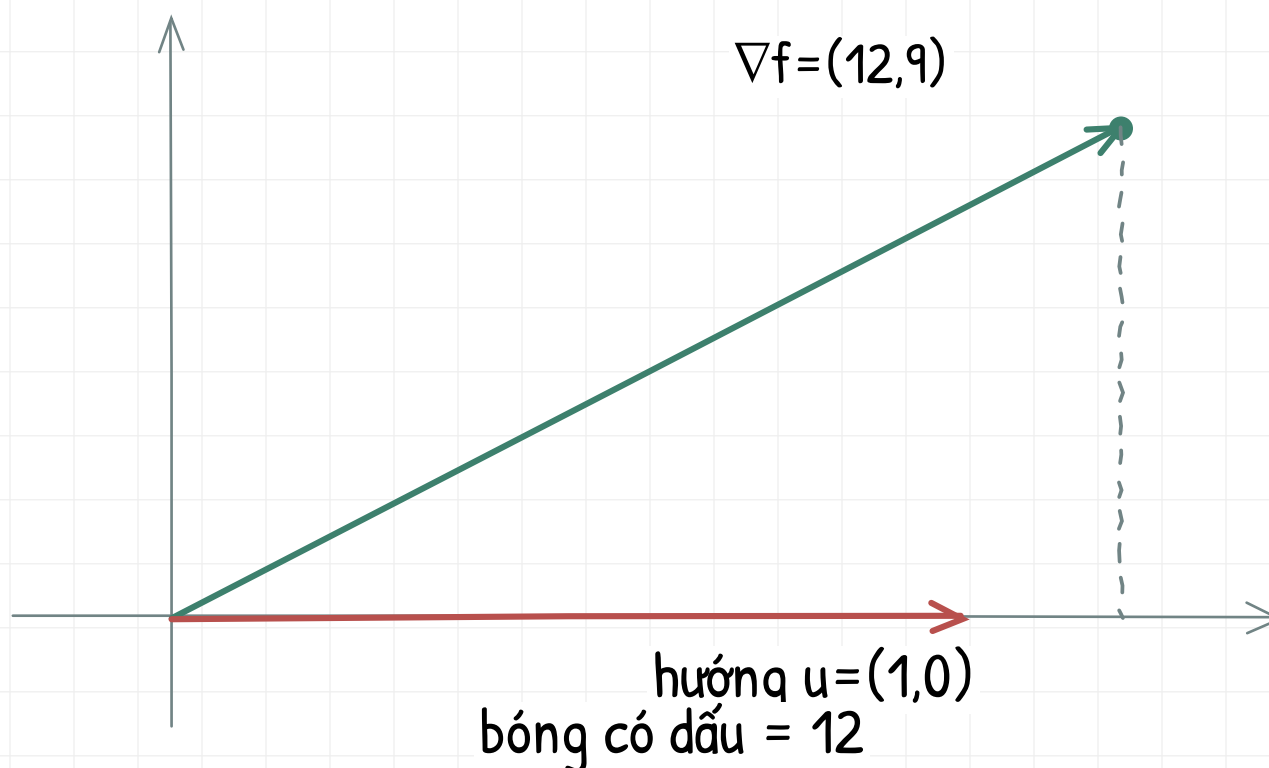
Gom lại: $\nabla f = (12, 9)$. Nó có cùng số chiều với vector đầu vào.

Khi bước nhỏ $\Delta = (\Delta x, \Delta y)$: $\Delta f \approx 12\Delta x + 9\Delta y = \nabla f \cdot \Delta$.

Đạo hàm riêng là độ dốc của một lát cắt qua bề mặt.

Độ dốc theo hướng là cái bóng

Chọn một hướng đơn vị u ; chiếu gradient lên hướng ấy.



Từ hình đến công thức

Với f khả vi: $D_u f = \nabla f \cdot u = \|\nabla f\| \cos \theta$, khi $\|u\| = 1$.

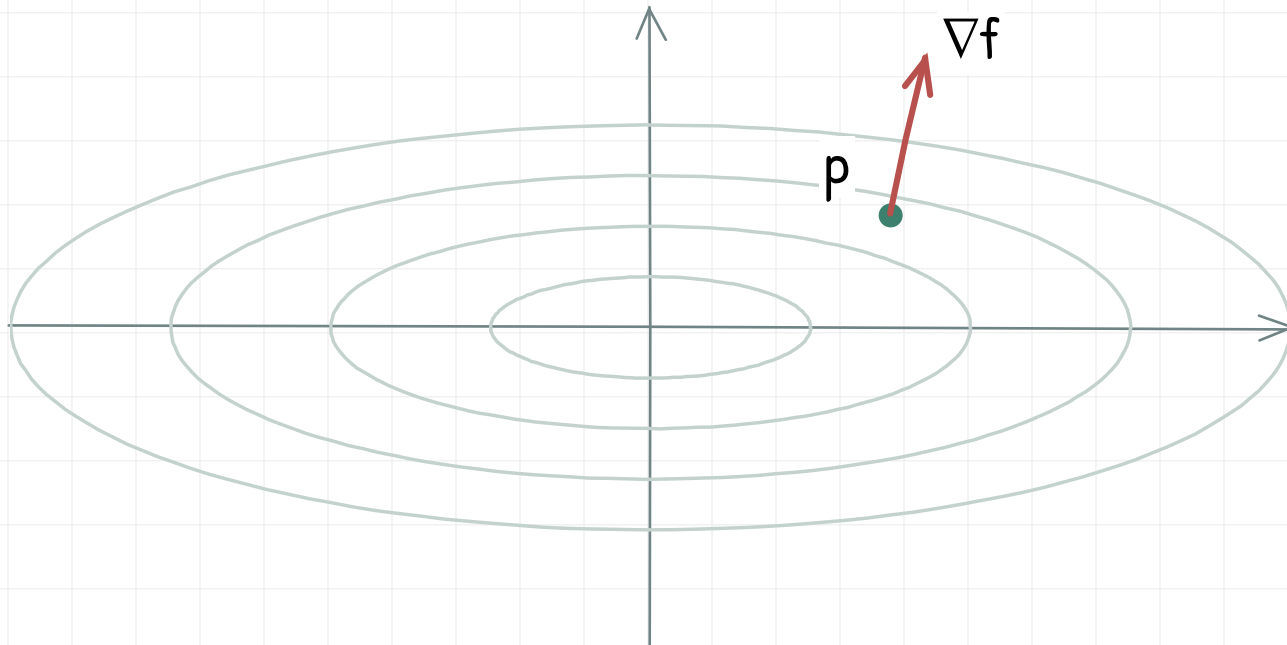
$\|(12, 9)\| = 15$. Hướng $(0.8, 0.6)$ cho dốc 15, lớn nhất.

Hướng ngược cho -15 ; hướng $(-0.6, 0.8)$ cho 0.

Đốc nhất xét giữa các bước có cùng độ dài Euclid.

Gradient vuông góc đồng mức

Các đường cong là những điểm cùng độ cao; mũi tên hướng lên dốc.



Từ hình đến công thức

Đi dọc đồng mức: f không đổi nên $\nabla f \cdot u = 0$ với hướng tiếp tuyến u .

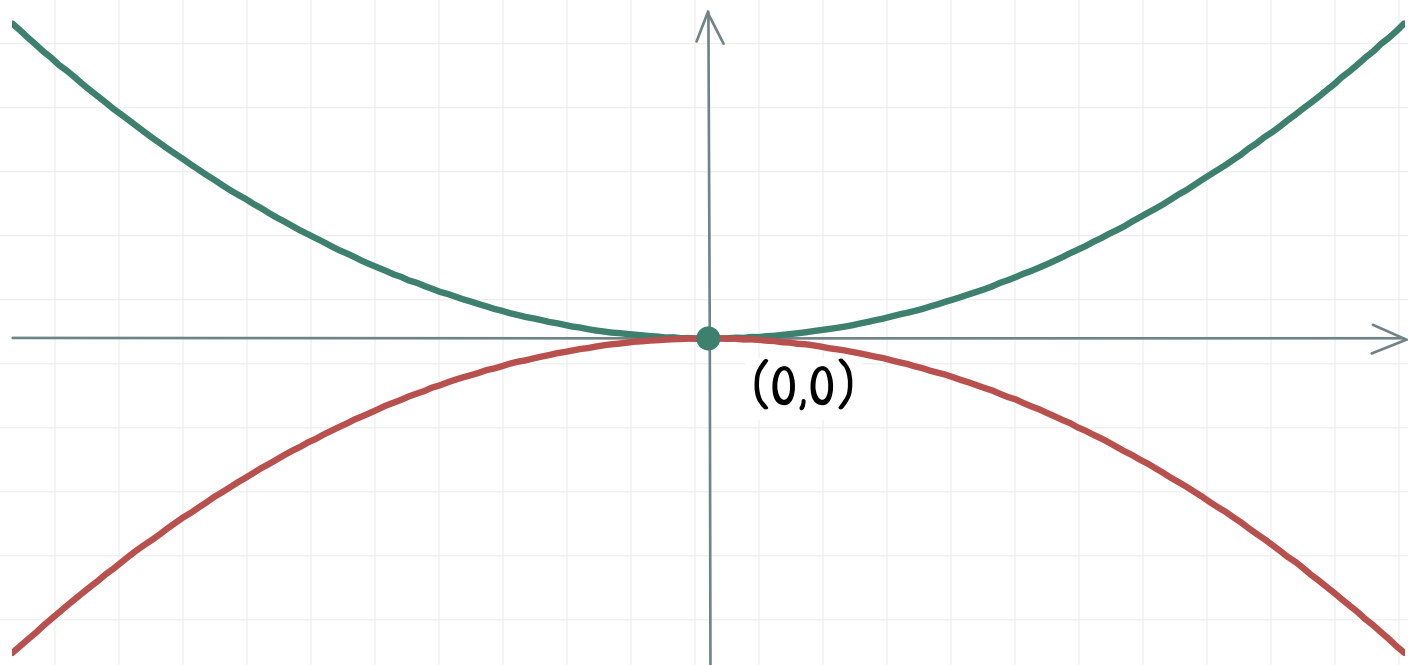
Vì vậy ∇f vuông góc đồng mức; $-\nabla f$ là hướng giảm nhanh nhất tại chỗ.

Với $x^2 + 10y^2$: $\nabla f = (2x, 20y)$. Hướng này thường không trở thẳng về đáy.

Hướng tốt tại chỗ không có nghĩa là đường ngắn nhất đến nghiệm.

Đứng yên chưa chắc ở đáy

Cùng qua một điểm: một lát cong lên, lát kia cong xuống.



— lát $y=0: x^2$

— lát $x=0: -y^2$

Từ hình đến công thức

$$f = x^2 - y^2; \nabla f(0,0) = (0,0).$$

$f(0.1,0) = +0.01$, còn $f(0,0.1) = -0.01 \rightarrow$ có cả điểm cao lẫn thấp sát bên.

Đây là điểm yên ngựa. $\nabla f = 0$ là điều kiện cần cho cực trị nội miền khả vi, chưa đủ.

Gradient nhỏ cần chẩn đoán thêm; không tự động có nghĩa “đã tối ưu”.

Hessian đo độ cong

Ở điểm dừng, xem bề mặt cong lên hay xuống dọc các trục chính.

Eigenvalue H	Dạng quanh điểm dừng
tất cả dương	bát: cực tiểu chặt
tất cả âm	vòm: cực đại chặt
có dương và âm	yên ngựa
còn lại, có số 0	cần xét thêm

Từ hình đến công thức

$H_{ij} = \partial^2 f / (\partial x_i \partial x_j)$; H là Jacobian của gradient.

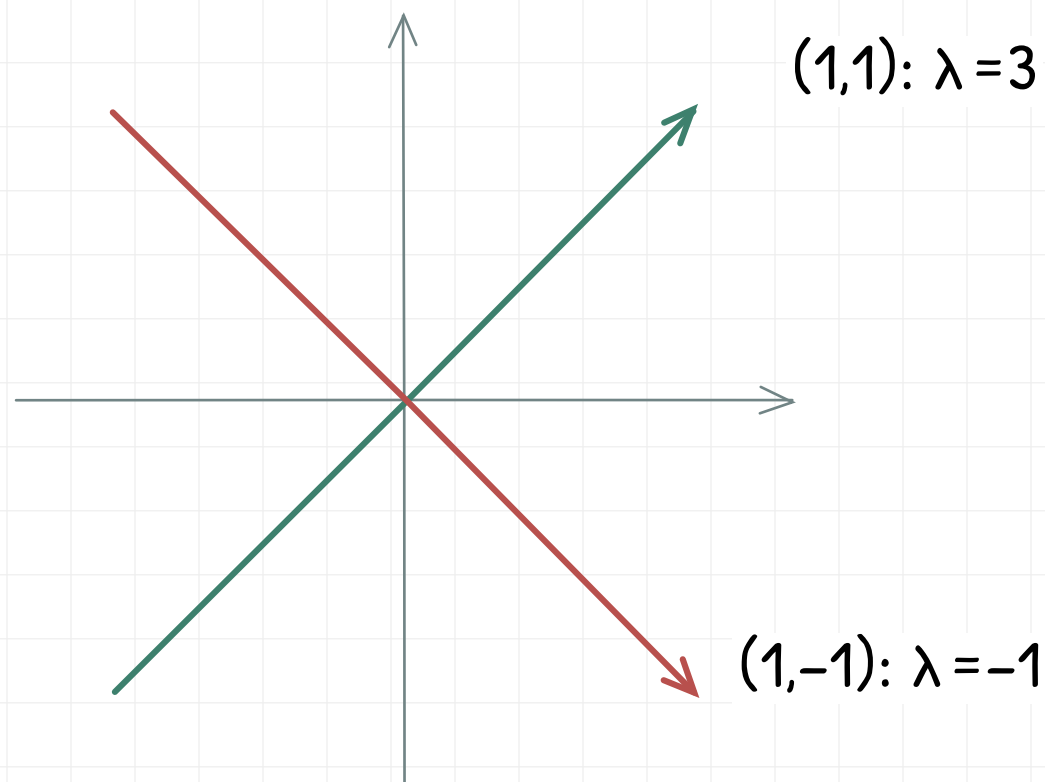
Với f đủ trơn: H đối xứng. $\Delta f \approx \nabla f \cdot \Delta + \frac{1}{2} \Delta^T H \Delta$.

Tại điểm dừng $\nabla f = 0$, dấu độ cong dọc eigenvector được quyết định bởi eigenvalue.

Có eigenvalue 0 vẫn có thể kết luận yên ngựa nếu đã có cả hai dấu.

Xoay trục để lộ yên ngựa

Theo trục x và y đều cong lên; theo đường chéo lại có hướng cong xuống.



Từ hình đến công thức

$f = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2$; H có các hàng (1,2) và (2,1).

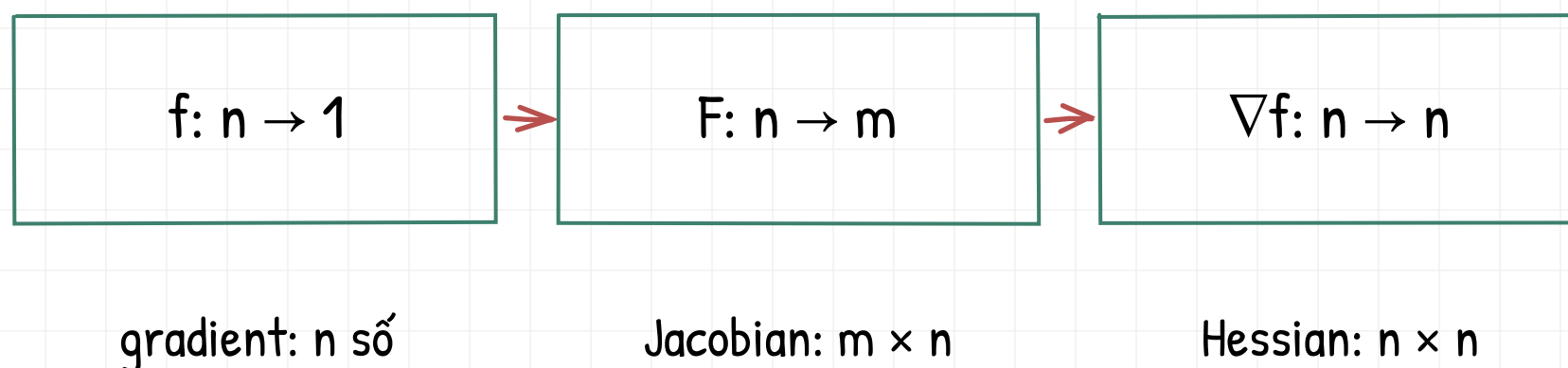
Eigenvalue -1 và 3 : hai độ cong trái dấu. Theo $x=y$, $f=3x^2$; theo $y=-x$, $f=-x^2$.

Chỉ thử từng trục tọa độ có thể bỏ sót hướng giảm nằm chéo.

Eigenvector tìm trục chính, kể cả khi chúng không trùng trục tọa độ.

Cùng một ý, ba kích thước

Một số ra, nhiều số ra, rồi lấy đạo hàm của chính gradient.



Từ hình đến công thức

$F(x,y) = (x^2y, x+y)$ tại $(1,2)$: J_F có hàng $(4,1)$, $(1,1)$.

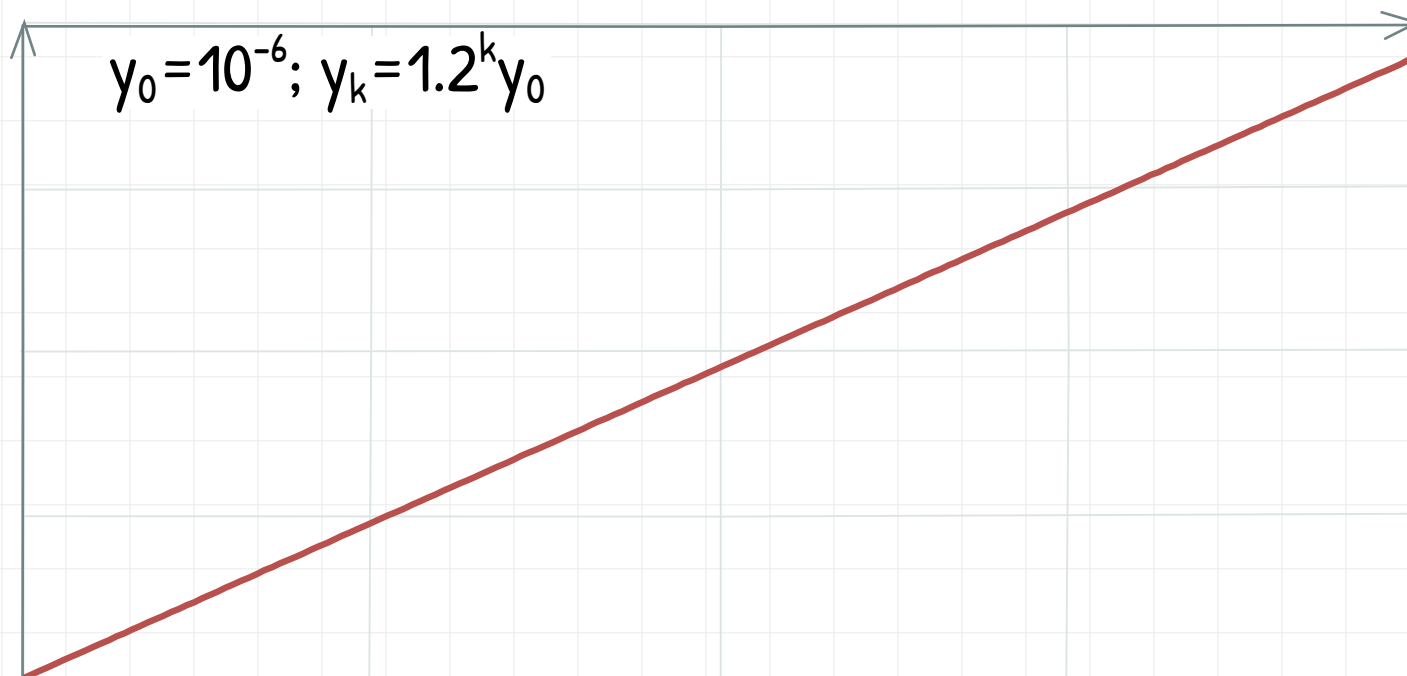
$G(a,b) = (a+b, ab)$ tại $F(1,2) = (2,3)$: J_G có hàng $(1,1)$, $(3,2)$.

$J_G \circ F = J_G \cdot J_F$: các hàng $(5,2)$, $(14,5)$.

Ghi kích thước trước khi nhân giúp bắt lỗi chain rule.

Có hướng thoát, vẫn có thể chậm

GD trên $x^2 - y^2$, $lr=0.1$: x co lại nhưng độ lệch theo y lớn dần.



— dọc: $\log_{10} |y|$

— ngang: bước k

Từ hình đến công thức

$x_{k+1} = 0.8x_k$; $y_{k+1} = 1.2y_k$. Từ $y_0 = 10^{-6}$, sau 60 bước $y \approx 0.0563$.

Nếu đứng đúng $(0,0)$, GD thuần đứng yên. Nhiều có thể giúp rời điểm đó.

Ma trận ngẫu nhiên minh họa nhiều hướng cong; không chứng minh mọi mạng thật chủ yếu gặp yên ngựa.

Đánh giá loss, gradient và độ cong; đừng chỉ nhìn một đoạn plateau.

Tự kiểm tra khi đi tiếp

Che đáp án, thử nói bằng lời

1. Gradient x^2y tại $(3,2)$ là gì?
2. Hướng đơn vị làm hàm giảm nhanh nhất?
3. $\nabla f=0$ đã đủ để kết luận cực tiểu?
4. $H=[[1,2],[2,1]]$ nói gì về điểm dừng?
5. Jacobian và Hessian khác nhau thế nào?

Đáp nhanh

1. $(12,9)$, có độ dài 15.
2. $-\nabla f/\|\nabla f\|$ nếu ∇f khác 0, theo chuẩn Euclid.
3. Chưa; x^2-y^2 tại gốc là yên ngựa.
4. Eigenvalue $-1,3 \rightarrow$ yên ngựa; trục chính nằm chéo.
5. J cho hàm vector; H là J của gradient hàm vô hướng.