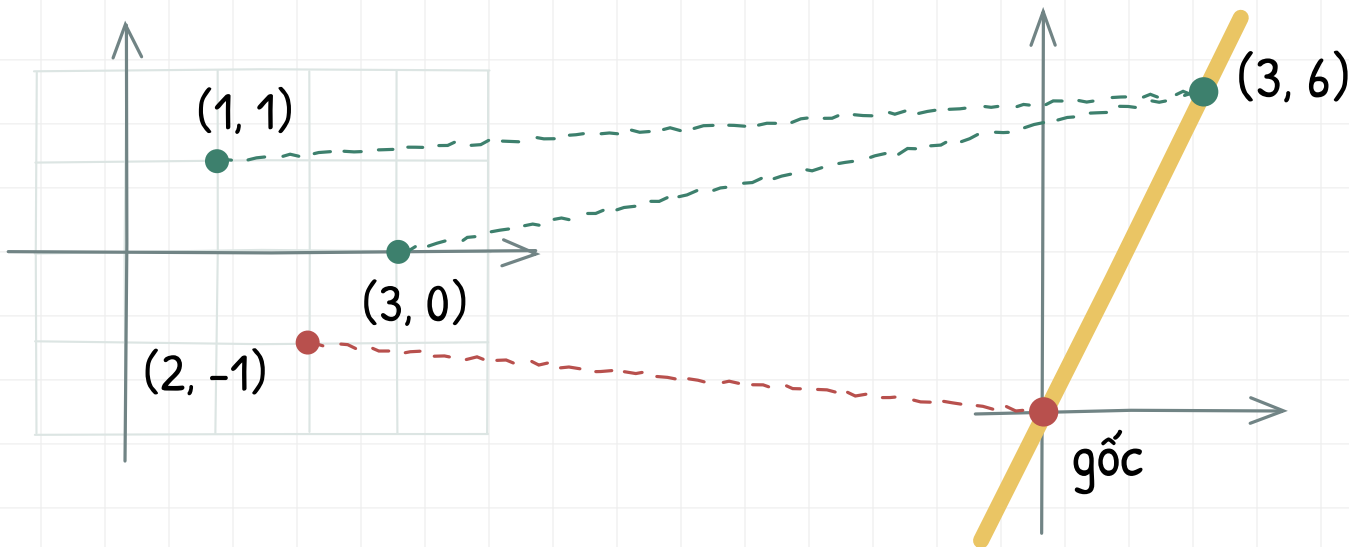


Hai ma trận, một khác biệt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

đầu vào v	A v	B v
(1, 1)	(3, 6)	(3, 7)
(3, 0)	(3, 6)	(3, 9)
(2, -1)	(0, 0)	(0, 2)



cả mặt phẳng vào

A ép lên đường $y = 2x$

- 1. Hai đầu vào khác nhau, một đầu ra: đụng độ như hash collision.
Đã đụng độ thì không có hàm ngược.
- 2. (2, -1) khác 0 mà bị xóa về gốc: cả một hướng mất sạch.

B không làm cả hai. Khác biệt gói trong một số: HẠNG.

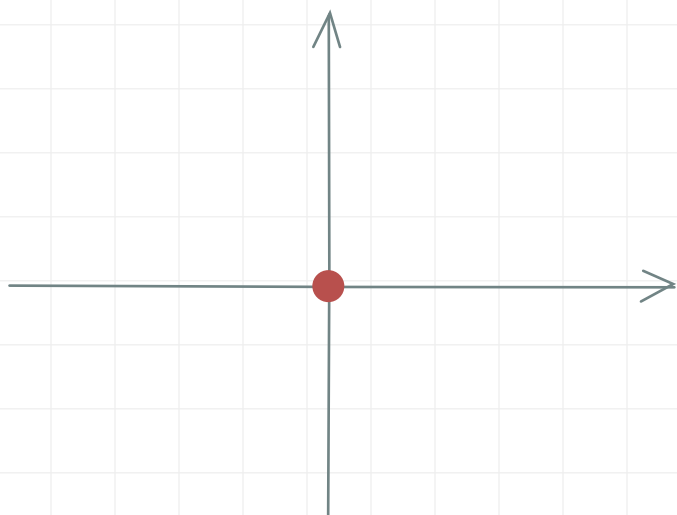
Span = mọi thứ tạo ra được

Chỉ có hai phép: cộng vector, nhân vector với một số.

Tổ hợp tuyến tính: $a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + \dots + k \cdot v_n$

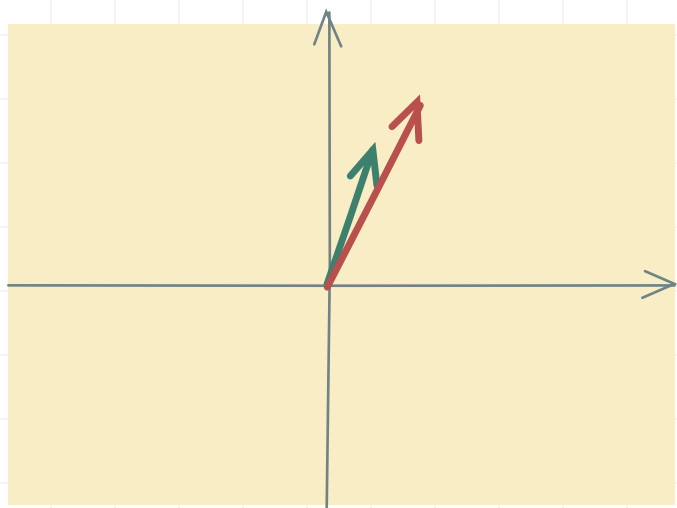
SPAN = tập MỌI tổ hợp như thế

Không phải bộ nguyên liệu, mà là mọi thứ chạm tới được (reachable set).



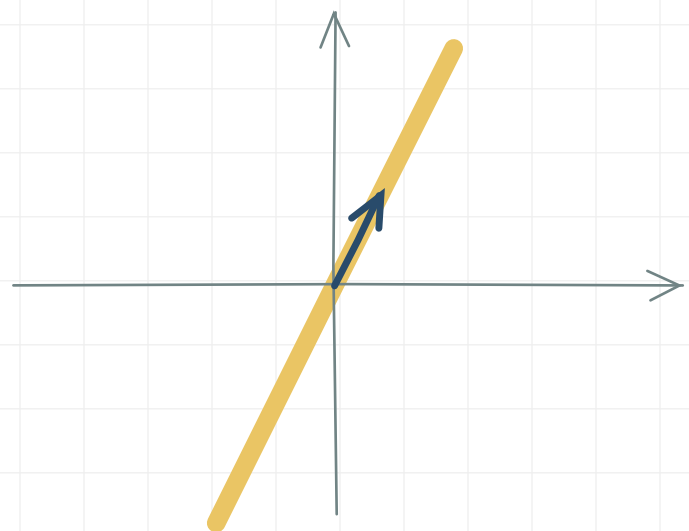
chỉ $(0, 0)$

→ một điểm · 0 chiều



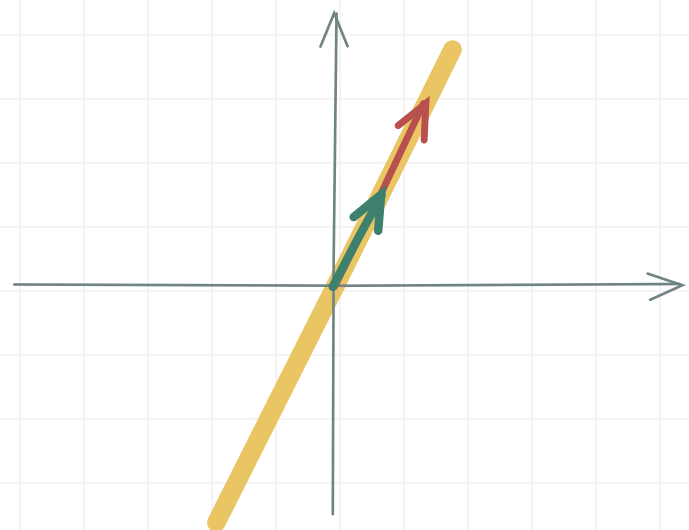
$(1, 3)$ và $(2, 4)$ khác phương

→ cả mặt phẳng · 2 chiều



một vector $(1, 2)$

→ một đường thẳng · 1 chiều



$(1, 2)$ và $(2, 4)$ cùng phương

→ VẪN một đường · 1 chiều

Hai vector KHÔNG đảm bảo hai chiều.

Ô cuối là cái bẫy, và là toàn bộ bài này.

Phụ thuộc: có một vector thừa

Span của (1, 2) và (2, 4) là gì?

$$a(1, 2) + b(2, 4) = (a + 2b, 2a + 4b) = (t, 2t)$$

với $t = a + 2b$, vì $2a + 4b = 2(a + 2b) \Rightarrow$ mọi kết quả nằm trên đường $y = 2x$.

(5, 6): cần $6 = 2 \times 5 = 10$. Sai $\Rightarrow$ NGOÀI span, không a, b nào tạo ra.

(6, 12): $12 = 2 \times 6 \checkmark \Rightarrow$ tạo được, và bằng nhiều cách:

$$(a, b) = (6, 0), (0, 3), (2, 2), (4, 1), (-2, 4)$$

Giữ năm cách này lại: tờ 8 cho thấy chúng lệch nhau theo một quy luật.

Định nghĩa

PHỤ THUỘC tuyến tính: có một tổ hợp bằng 0

mà các hệ số KHÔNG phải tất cả bằng 0. Ngược lại: ĐỘC LẬP.

☆ Nói kiểu người: có vector thừa, nó nằm sẵn trong span của các vector kia.

A: cột (1, 2), (2, 4)

$$a(1, 2) + b(2, 4) = 0$$

$$a + 2b = 0, 2a + 4b = 0 (\times 2)$$

còn một ràng buộc: $a = -2b$

$$b = -1, a = 2: 2c_1 - c_2 = 0$$

PHỤ THUỘC: $c_2 = 2c_1$

B: cột (1, 3), (2, 4)

$$a(1, 3) + b(2, 4) = 0$$

$$a + 2b = 0, 3a + 4b = 0$$

$$\Rightarrow -2b = 0 \Rightarrow b = 0, a = 0$$

chỉ có nghiệm tầm thường

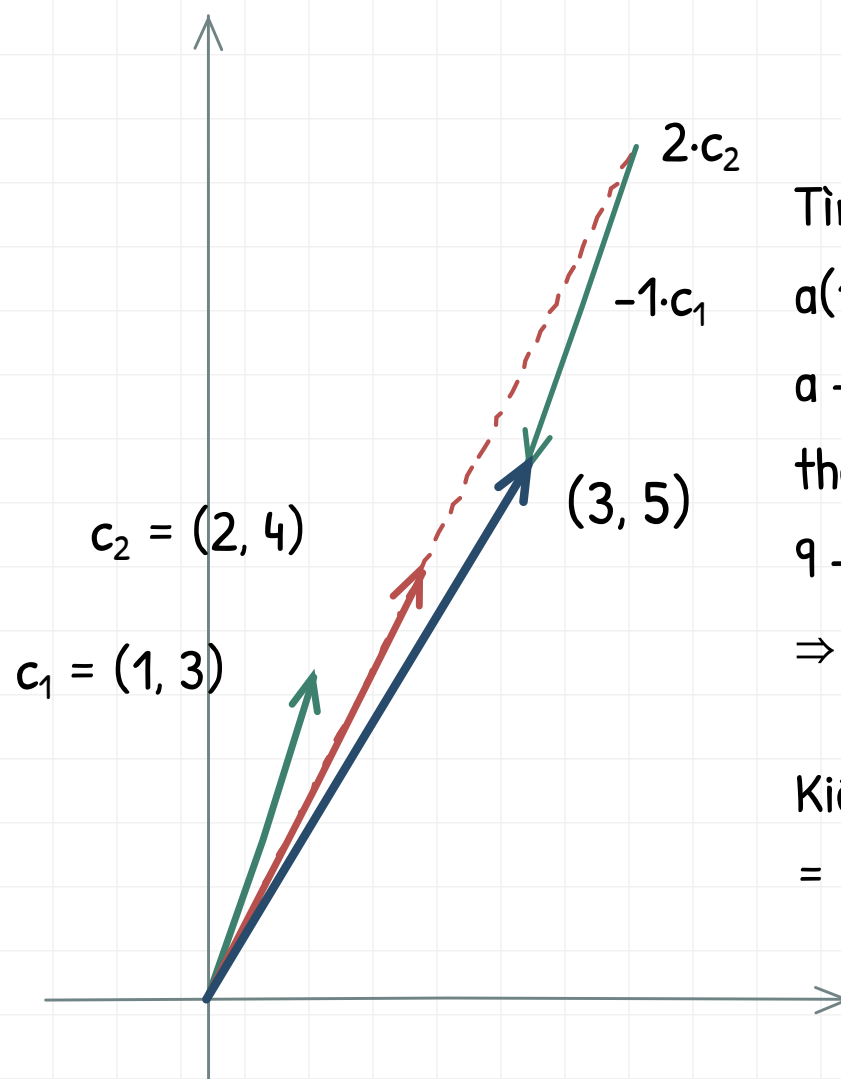
ĐỘC LẬP

Bóp mặt phẳng thành đường $\Leftrightarrow$ hai cột phụ thuộc $\Leftrightarrow$ cùng phương.

Như cột gia_ban_x2 trong SQL: chiếm chỗ, không thêm bit thông tin nào.

Cơ sở: không dư, không thiếu

Cơ sở = độc lập (không dư) + span được cả không gian (không thiếu).



Tìm a, b :

$$a(1, 3) + b(2, 4) = (3, 5)$$

$$a + 2b = 3, \quad 3a + 4b = 5$$

thế $a = 3 - 2b$ vào pt 2:

$$9 - 6b + 4b = 5 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow a = 3 - 4 = -1$$

$$\text{Kiểm: } -1 \cdot (1, 3) + 2 \cdot (2, 4)$$

$$= (-1 + 4, -3 + 8) = (3, 5) \checkmark$$

Cùng một mũi tên, hai bộ số

Hệ chuẩn: $(3, 5)$. Cơ sở $\{(1, 3), (2, 4)\}$: $(-1, 2)$.

Số chiều = số vector trong MỘT cơ sở; chọn cơ sở nào cũng ra cùng số.

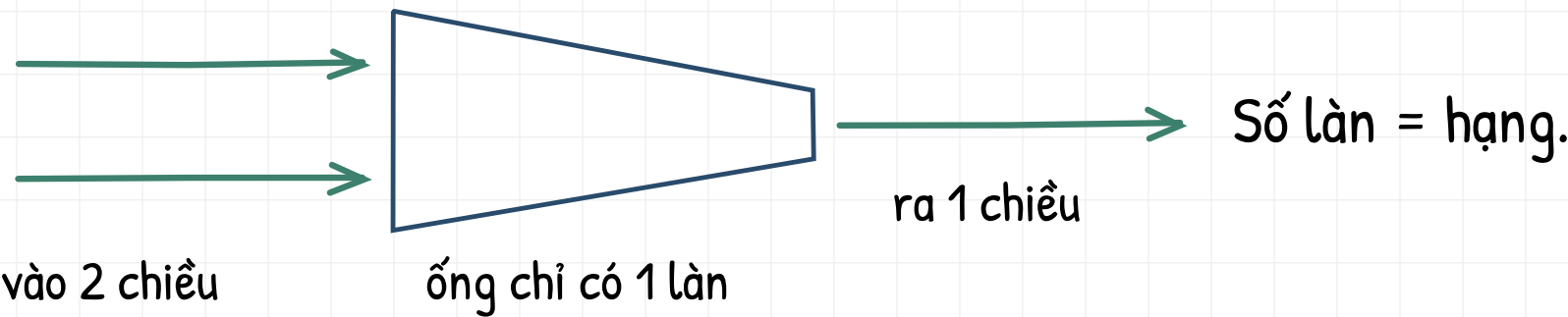
Đó là định lý khiến chữ "chiều" có nghĩa.

Đổi cơ sở là chuyện của bài 6; ở đây chỉ cần thấy nó tồn tại.

Hạng = số chiều còn sống sót

rank(M)

- = số chiều của nơi M đẩy mọi thứ vào
- = số cột độc lập tuyến tính
- = số chiều phép biến đổi giữ lại được



	$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
hai cột	$(1, 2), (2, 4)$	$(1, 3), (2, 4)$
cùng phương?	có: $c_2 = 2c_1$	không có tỉ lệ nào
span các cột	đường $y = 2x$	cả $\mathbb{R}^2$
HẠNG	1	2
2 chiều vào → ra	1 chiều, mất 1	2 chiều, giữ nguyên
nghịch đảo?	KHÔNG	CÓ
det (bài 4)	0	-2

Các ca cực đoan để chốt khái niệm

- $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$: hạng 0, bóp MỌI thứ về gốc.
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$: hạng 1, chiếu lên trục x: $(3, 5) \rightarrow (3, 0), (3, -2) \rightarrow (3, 0)$.
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$: hạng 2, không làm gì.

01 Hàng 1 $\neq$ chỉ một hàng hay một cột khác 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Hạng đếm HƯỚNG độc lập, không đếm ô khác 0.

02 $\text{rank} \leq \min(\text{số hàng}, \text{số cột})$

768

→ hạng 2, 2, 2, 4: luôn bằng min. Ngẫu nhiên thì không có phụ thuộc nào ngoài phần kích thước ép (2×3 : 3 cột trong $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ thừa 1 cột).

03 hạng theo CỘT = hạng theo HÀNG

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

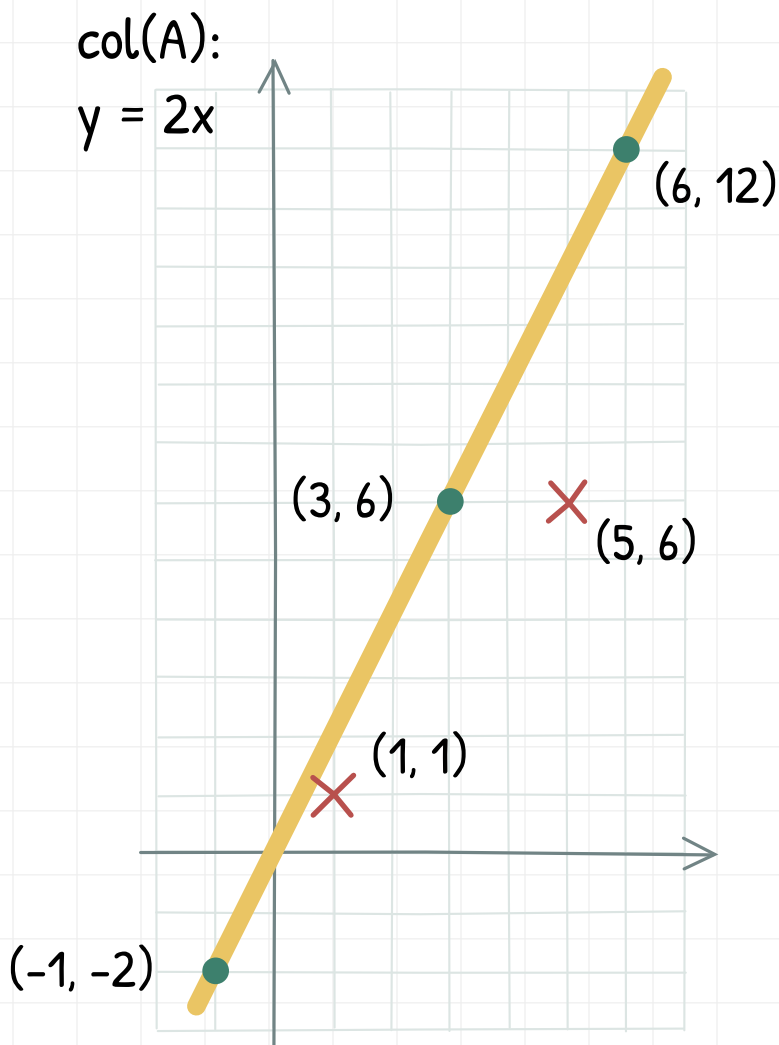
Strang: "You might find that combination quickly (I didn't)."

Bây: $\text{null}(A)$ và $\text{null}(A^T)$ cùng SỐ CHIỀU, nhưng là hai không gian khác nhau.

Bài quốc §4 (bãi 1-3), §4b

Không gian cột: đầu ra chạm tới được

$\text{col}(M)$ = span các cột của M = mọi giá trị $M \cdot x$ có thể tạo ra,
vì (bài 2) $M \cdot x = x_1 \cdot \text{cột 1} + x_2 \cdot \text{cột 2}$: mỗi $M \cdot x$ là một tổ hợp các cột.
Hạng = số chiều của $\text{col}(M)$. Định nghĩa gọn nhất.



t	$y - 2x$	
$(3, 6)$	0	✓
$(6, 12)$	0	✓
$(-1, -2)$	0	✓
$(5, 6)$	-4	✗
$(1, 1)$	-1	✗

✓ có nghiệm (có thể vô số)
✗ vô nghiệm

$M \cdot x = t$ có nghiệm $\Leftrightarrow t$ nằm trong $\text{col}(M)$. Hết.

Cẩn thận: `np.linalg.solve(A, t)` báo "Singular matrix" với MỌI t , kể cả $(3, 6)$ có nghiệm. Lỗi đó nói "A suy biến", không nói " t ngoài $\text{col}(A)$ ".
Muốn biết $(5, 6)$ vô nghiệm: kiểm $y - 2x = -4 \neq 0$.

$B: \text{col}(B) = \text{cả } \mathbb{R}^2 \Rightarrow B \cdot x = t$ LUÔN có nghiệm.
Ví dụ $t = (3, 5) \rightarrow x = (-1, 2)$, đúng phép tính ở tờ 4.

Backend: tập giá trị trả về THẬT SỰ chạm tới được, không phải kiểu trả về.

Không gian null: cái bị bóp về gốc

$\text{null}(M)$ = mọi x với $M \cdot x = 0$. Chứa thứ khác 0 $\Rightarrow$ đựng độ $\Rightarrow$ không đảo được.

$$A(x, y) = (x + 2y, 2x + 4y) = (0, 0)$$

pt 2 = pt 1 $\times$ 2 $\Rightarrow$ còn một ràng buộc: $x = -2y$

$$y = -1: A(2, -1) = (2 - 2, 4 - 4) = (0, 0) \checkmark$$

$\text{null}(A) = \text{span}\{(2, -1)\}$: một đường, 1 chiều

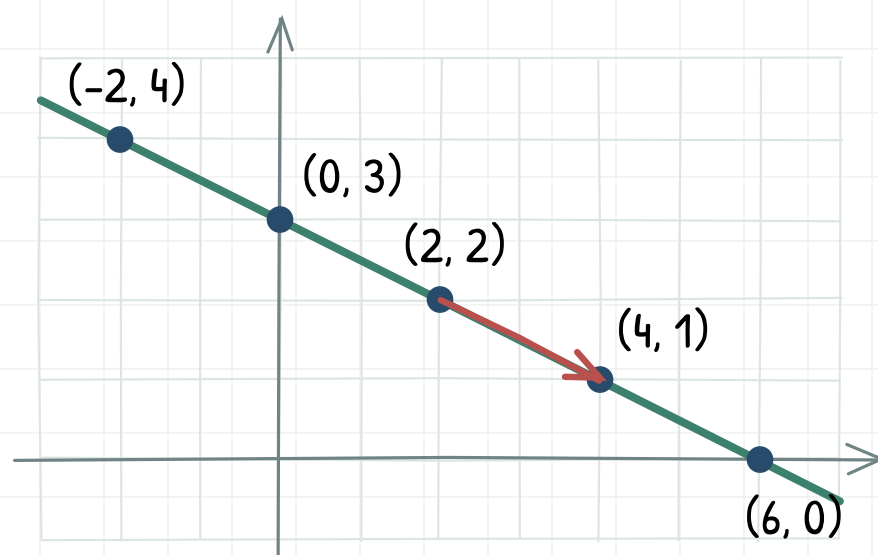
scipy trả $(-0.8944, 0.4472) = -(2, -1)/\sqrt{5}$: cùng đường, đã chuẩn hóa.

Cơ sở không duy nhất (cả dấu): thư viện chọn trục chuẩn, bạn chọn số nguyên.

$B(2, -1) = (0, 2) \neq 0$. $\text{null}(B) = \{0\}$: không mất gì $\Rightarrow$ B đảo được.

Năm cách ra (6, 12) ở tờ 3

(a, b) ở tờ 3 chính là nghiệm x của $A \cdot x = (6, 12)$, vì $A \cdot (a, b) = a \cdot c_1 + b \cdot c_2$.



$$(6, 0) - (0, 3) = 3 \cdot (2, -1)$$

$$(6, 0) - (2, 2) = 2 \cdot (2, -1)$$

$$(2, 2) - (-2, 4) = 2 \cdot (2, -1)$$

Mọi nghiệm: $x + 2y = 6$.

Lệch nhau đúng một bội của $(2, -1)$: mũi tên đỏ.

Tập nghiệm của $M \cdot x = t$ = một nghiệm x_0 + cả $\text{null}(M)$

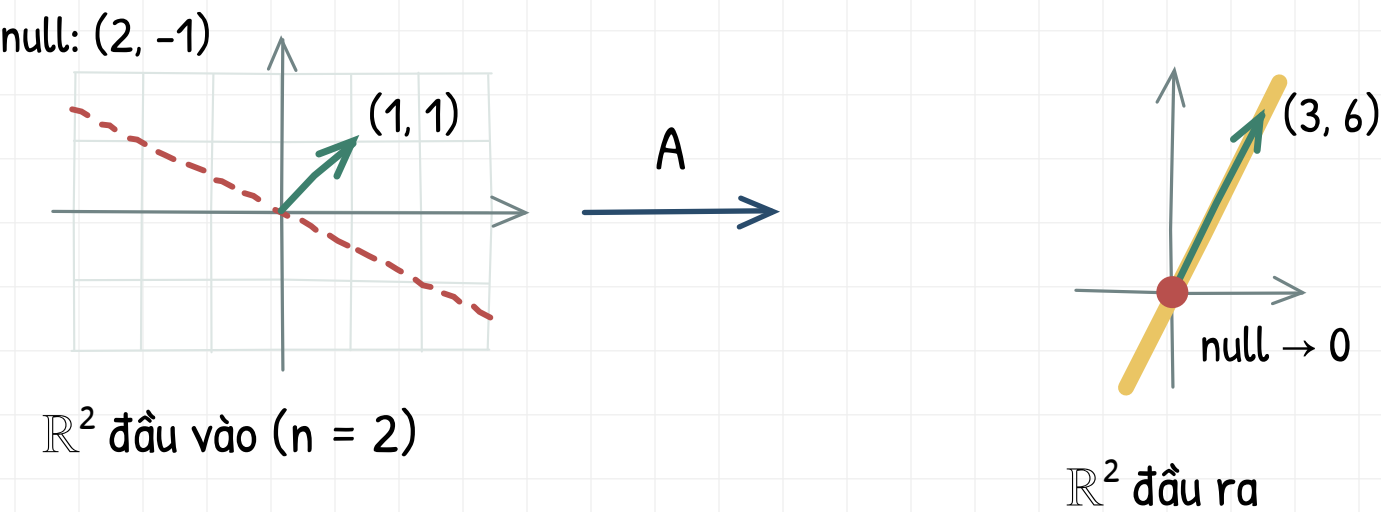
vì nếu $M \cdot x_0 = t$ và $M \cdot z = 0$ thì $M(x_0 + z) = t + 0 = t$.

$\text{null} = \{0\} \Rightarrow$ nghiệm duy nhất. null 1 chiều $\Rightarrow$ vô số nghiệm trên một đường.

Hạng + nullity = số cột

$\text{dim col}(M) + \text{dim null}(M) = n \text{ (số cột)}$

Mỗi chiều đầu vào: hoặc được GIỮ LẠI, hoặc bị BÓP về 0.
Không có lựa chọn thứ ba, không chiều nào biến khỏi sổ sách.



1 chiều bị bóp (nullity 1) + 1 chiều giữ lại (hạng 1) = 2

ma trận	số cột	hạng	nullity	tổng
$A = [[1,2],[2,4]]$	2	1	1	2 ✓
$B = [[1,2],[3,4]]$	2	2	0	2 ✓
$C \text{ (} 3 \times 3, \text{ tờ 10)}$	3	2	1	3 ✓
$[[0,0],[0,0]]$	2	0	2	2 ✓
I_2	2	2	0	2 ✓

Bẫy 4 $\text{col}(M)$ sống ở ĐẦU RA $\mathbb{R}^m$, $\text{null}(M)$ sống ở ĐẦU VÀO $\mathbb{R}^n$. Ma trận 3×2 :
 $\text{null} \subset \mathbb{R}^2$, $\text{col} \subset \mathbb{R}^3$: chỉ cộng được SỐ CHIỀU, và tổng là 2 (số cột).

Khử Gauss: tính hạng bằng tay

Ba phép biến đổi hàng KHÔNG đổi hạng: đổi chỗ hai hàng · nhân một hàng với số $\neq 0$ · cộng bội của hàng này vào hàng kia. Xong đếm hàng khác 0.

C

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{bước 1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{bước 2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftarrow R_2 - 4R_1$
 $R_3 \leftarrow R_3 - 7R_1$

$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2$
 một hàng biến mất

Hai hàng khác 0 $\Rightarrow \text{rank}(C) = 2$.

3×3 mà hạng 2 $\Rightarrow$ bóp $\mathbb{R}^3$ xuống một MẶT PHẪNG; nullity = $3 - 2 = 1$.

Đi tiếp tới dạng bậc thang RÚT GỌN (rref): $R_2 \leftarrow R_2 \div (-3)$, rồi $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$.

$$\text{rref}(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 - x_3 = 0 \rightarrow x_1 = x_3$
 $x_2 + 2x_3 = 0 \rightarrow x_2 = -2x_3$
 x_3 tự do. Chọn $x_3 = 1$:
 $\text{null}(C) = \text{span}\{(1, -2, 1)\}$

Kiểm: $C \cdot (1, -2, 1) = (1 - 4 + 3, 4 - 10 + 6, 7 - 16 + 9) = (0, 0, 0) \checkmark$

☆ Trụ = số khác 0 đầu tiên của mỗi hàng. Cột có trụ = cột độc lập.

Cột KHÔNG có trụ = cột thừa, sinh đúng một chiều của null: hạng-nullity.

$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)$: cột 3 = cột 1 + cột 2 $\Rightarrow$ hạng 2,

span = mặt phẳng $z = 0$, null $(1, 1, -1)$. Đây là câu hỏi 3B1B tập 2.

Cổ chai: chiều mất là mất hẳn

$$\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank } A, \text{rank } B)$$

A hạng 1, B hạng 2:

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 14 & 20 \end{bmatrix}$$

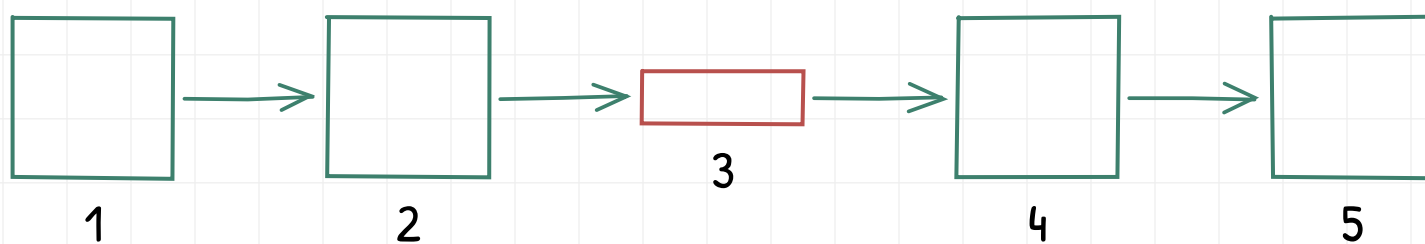
hạng 1 (hàng 2 = 2 × hàng 1)

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 11 & 22 \end{bmatrix}$$

hạng 1

Nhân thêm B, B², ..., B⁵ vào A: hạng vẫn 1.

Ảnh dụ pipeline (không phải các ma trận B ở trên):



stage 3 nén còn 1 byte: các stage sau mạnh đến mấy cũng không phục hồi.

Autoencoder có bottleneck; LoRA cố ý dùng nó.

Mặt kia: hạng thấp thì NÉN được

Hạng 1 = tích ngoài $u \otimes w$: $A[i][j] = u[i] \cdot w[j]$. Với A ở trên: $u = w = (1, 2)$.

$m \times n$ hạng r : lưu $r(m + n)$ số thay vì $m \cdot n$ số.

1000×768 , $r = 50$: $50 \times 1768 = 88.400$ số, thay vì $768.000 \rightarrow 11,5\%$.

LoRA: W $4096 \times 4096 = 16.777.216$ tham số. Học thêm $\Delta W = U \cdot V$ với

U 4096×8 , V 8×4096 (sách viết B·A, không phải A, B của bài):

$4096 \times 8 + 8 \times 4096 = 65.536$ tham số = $0,39\%$, ít hơn 256 lần.

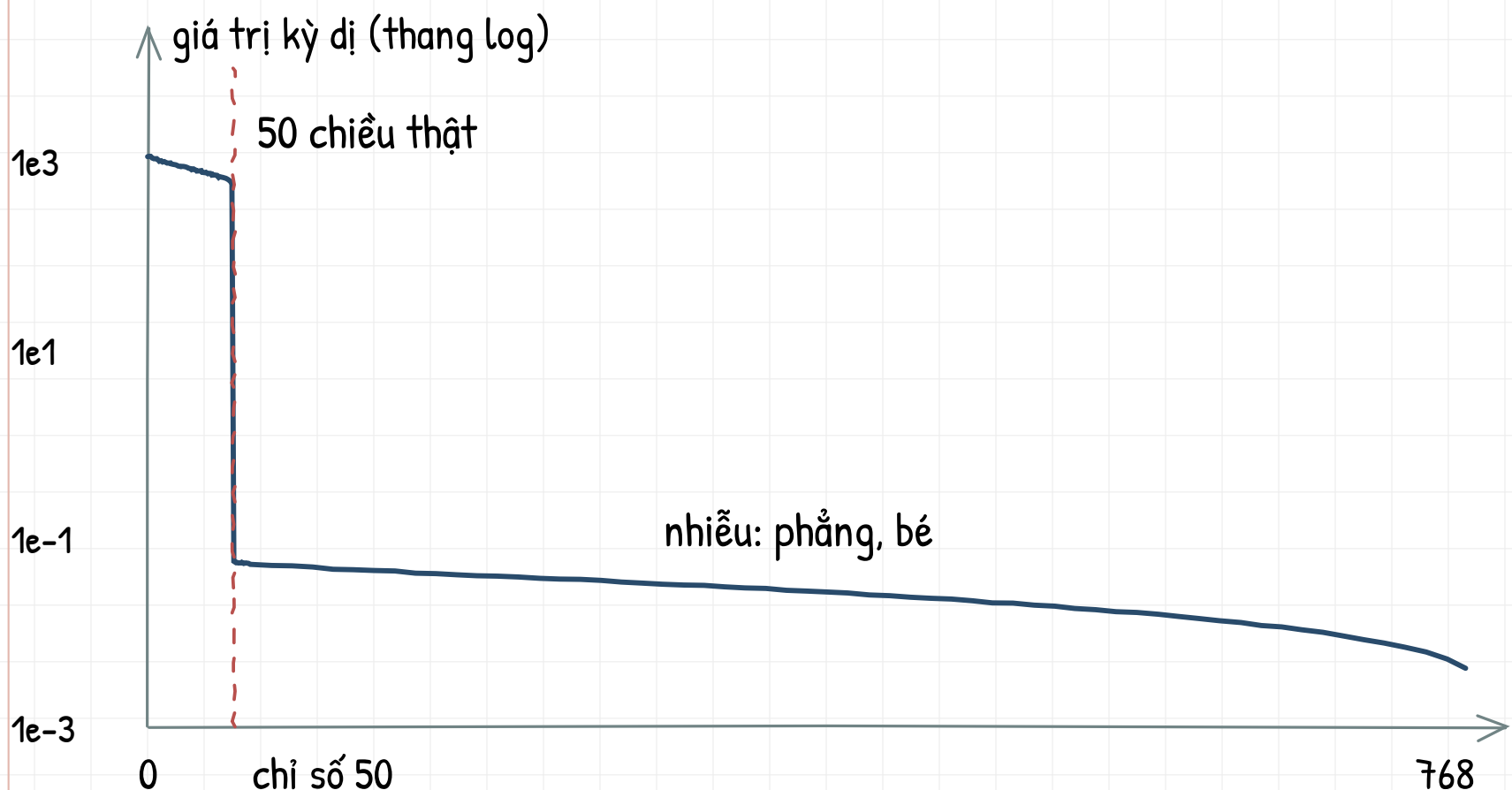
Ý chung của LoRA, PCA, SVD và nén mô hình: học kỹ ở bài 9.

Hạng trên dữ liệu thật

$X = U \cdot V$, U là 1000×50 , V là $50 \times 768 \Rightarrow$ chỉ có 50 chiều thật.

$\text{rank}(X) = 50 \checkmark$. Thêm nhiễu $1e-3$: $\text{rank}(X + \text{nhiều}) = 768 \times$ vô nghĩa.

Giá trị kỳ dị s (học kỹ ở bài 9): tạm hiểu là độ mạnh của từng hướng, xếp giảm dần.



$s[50] / s[0] = 4.96e-05$: nhỏ hơn khoảng 20.000 lần (đếm từ 0: $s[50]$ là giá trị thứ 51).

Chỉ cần 49 chiều để giữ 99% năng lượng (năng lượng = tổng các s^2).

Bẫy 5

Dữ liệu thật luôn có nhiễu: `matrix_rank` gần như luôn ra hạng đầy, và gần như luôn vô dụng. Cái cần là HẠNG HIỆU DỤNG: nhìn dãy giá trị kỳ dị tụt xuống ở đâu.

Lý thuyết: hạng là số nguyên. Dữ liệu: một đường cong tụt dần.

Tự cài `rank()` lệch numpy? Gần như luôn do ngưỡng TOL, không phải sai toán.

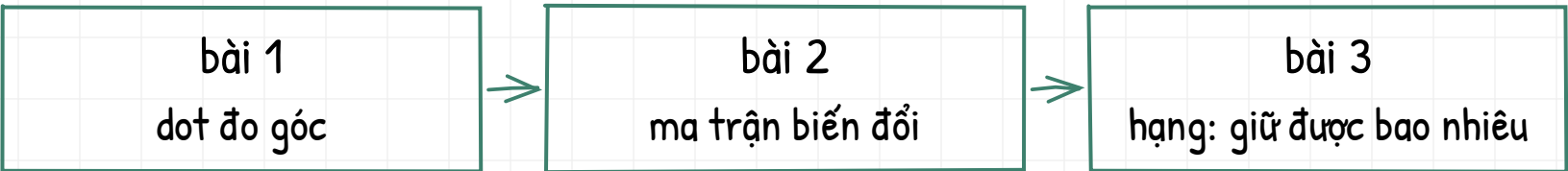
Nối vào AI

LoRA	học $W + U \cdot V$ (sách: $B \cdot A$), hạng $\leq r$. Cược: thay đổi có hạng thấp.
Attention	W^Q 512×64 , 100 token $\Rightarrow QK^T$ 100×100 nhưng hạng ≤ 64 .
MLA (DeepSeek)	ép KV cache qua không gian tiềm ẩn hạng thấp: cổ chai là thiết kế.
Embedding	768 chiều danh nghĩa, năng lượng dồn vào ít chiều (tờ 12).
PCA (bài 9)	tìm không gian cột k chiều tốt nhất để chiếu dữ liệu vào.
Autoencoder	lớp nén có null $\neq \{0\}$: phần trong null bị xóa thật.
Hiệp phương sai	suy biến khi đặc trưng phụ thuộc tuyến tính (tờ 3, đổi tên).

Ma trận là bộ nhớ

Ghi cặp (k, v) : $W += v \otimes k$ (hạng 1). Đọc bằng khóa q : $W \cdot q$.
 $W \cdot k_j = \sum v_i (k_i \cdot k_j)$: khóa trực chuẩn $\Rightarrow$ chỉ còn v_j , đọc đúng.
 d chiều có tối đa d khóa trực giao $\Rightarrow$ lưu quá d cặp thì không thể đọc đúng hết.
Bài tập ~15 dòng ở cuối §9 (khóa ngẫu nhiên / trực chuẩn / delta rule).

Ba bài nối nhau



Attention: W^Q, W^K biến đổi (bài 2), hạ hạng xuống d_k (bài 3), QK^T đo góc (bài 1).

Mở rộng: đọc sau

Trụ bé (§8b)

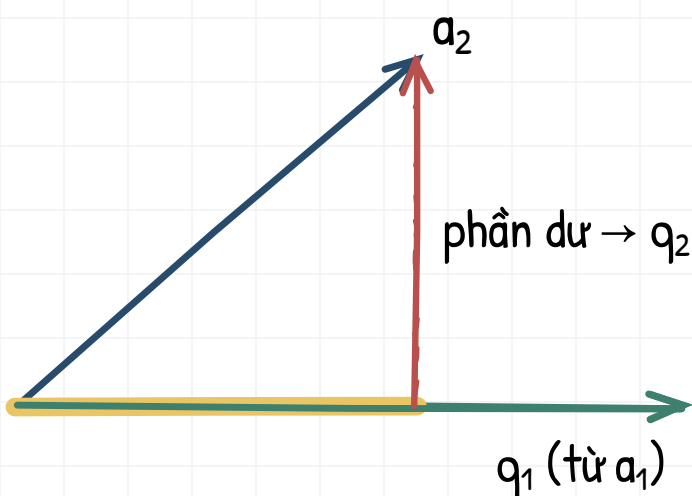
$[[\epsilon, 1], [1, 1]] \cdot x = (1 + \epsilon, 2)$, nghiệm đúng là $(1, 1)$ với MỌI ϵ .

Khử tay, không đổi hàng (buộc lấy ϵ làm trụ):

ϵ	det	sai số nghiệm
1e-1	-0.9	8.9e-16
1e-8	-1.0	6.1e-09
1e-15	-1.0	0.11 (11%)

Lập luận nghe đúng: $\det = \pm$ tích các trụ, không đổi $\Rightarrow$ tránh trụ bé cũng vô ích.
Đúng về đại số, sai về hậu quả: $\det$ trông "khỏe", nghiệm thì nát, không cảnh báo.
Chỉ số tổng hợp giữ nguyên $\neq$ quá trình bên trong lành mạnh.
numpy đổi trụ nên qua ví dụ này, nhưng không cứu bài toán tự nó nhảy:
trụ bé là lỗi thuật toán, số điều kiện xấu là tính chất ma trận.

Gram-Schmidt và $A = QR$ (§8c)



Trừ cái bóng lên mọi vector đã xử lý (bài 1).
Phần dư = 0 $\Rightarrow$ phụ thuộc, dừng lại.
Gom hệ số: $A = QR$, Q cột trực chuẩn, R tam giác trên.

VMLS: $a_1 = (-1, 1, -1, 1)$, $a_2 = (-1, 3, -1, 3)$, $a_3 = (1, 3, 5, 7)$
 $\Rightarrow R = [[2,4,2],[0,2,8],[0,0,4]]$. Thay $a_3 = a_1 + 2a_2$ thì dư ra đúng 0.
Dữ liệu thật thì dư thường $\approx 1e-15$ chứ không đúng 0 $\Rightarrow$ cần ngưỡng tol;
np.linalg.qr có thể đổi dấu cột Q và hàng R .

Cả hai phần để sau khi xong §1-9; không cần cho tự kiểm.

Tự kiểm, rồi mới sang bài 4

1. Span của hai vector trong $\mathbb{R}^2$ có thể là gì? Điều kiện từng trường hợp?
2. Chứng minh bằng đại số: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ bóp mặt phẳng lên $y = 2x$.
3. $A \cdot (1, 1) = A \cdot (3, 0)$. Suy ra hai sự thật gì (một về khả nghịch, một về null)? $(1, 1) - (3, 0)$ bằng bao nhiêu, nằm ở đâu?
4. Vì sao hạng + nullity = số cột là một luật BẢO TOÀN?
5. 768×4 và 4×768 : hạng tối đa? null của mỗi cái sống trong $\mathbb{R}$ mấy chiều?
6. Vì sao $\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank } A, \text{rank } B)$? Trả lời bằng HÀNH ĐỘNG.
7. `matrix_rank = 768` nhưng `s[50]` (giá trị thứ 51) nhỏ hơn `s[0]` 20.000 lần: hạng "thật" là bao nhiêu? Câu hỏi đó có một đáp án duy nhất không?
8. LoRA $r = 8$: $U \cdot V$ hạng tối đa bao nhiêu? Giả định gì phải đúng, sai khi nào?

Câu 6, 7 đắt nhất. Câu 8 làm bạn lúng túng là dấu hiệu tốt: câu mở.

Bài tập giấy (trước khi gõ code)

1. Hạng của $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ bằng khử Gauss; cơ sở của null.
(Nhìn kỹ ba hàng trước, có thể không cần khử gì.)
2. Ma trận nào đưa $(1, 0) \rightarrow (2, 4)$, $(0, 1) \rightarrow (3, 6)$? Hạng? Bóp lên đường nào?
3. Tìm một ma trận 3×3 hạng đúng 1, viết thành $u \otimes w$. null có mấy chiều?

Code: tự cài `rank()` bằng khử Gauss, KHÔNG dùng `matrix_rank`; kiểm hạng + nullity = số cột trên A, B, C . Xong bài khi khớp numpy.

3B1B: xem lại tập 2, xem tập 7 (chính của bài); tập 6, 8 là thưởng.

Mang sang bài 4

$\det(A) = 0$ đi cùng hạng 1, $\det(B) = -2$ đi cùng hạng 2. Một ma trận 3×3 hạng 1 và một ma trận 3×3 hạng 2 đều có $\det = 0$: $\det$ đánh mất gì mà hạng giữ?

Bài 6: hạng có đổi khi đổi cơ sở không? Nếu không, cái gì làm nó bất biến?

Đáp nhanh

1. $\{0\}$ nếu cả hai bằng 0; một đường nếu cùng phương (có ít nhất một $\neq 0$);
cả mặt phẳng nếu không cùng phương.
2. $A(v_1, v_2) = (v_1 + 2v_2, 2v_1 + 4v_2) = (t, 2t)$ với $t = v_1 + 2v_2 \Rightarrow y = 2x$.
3. Không khả nghịch (hai vào, một ra) và $\text{null} \neq \{0\}$:
 $(1, 1) - (3, 0) = (-2, 1) \in \text{null}(A)$, kiểm $A(-2, 1) = (0, 0)$.
4. Mỗi chiều đầu vào hoặc vào $\text{col}(M)$, hoặc bị bóp vào $\text{null}(M)$;
không có lựa chọn thứ ba $\Rightarrow$ tổng = số chiều đầu vào = số cột.
5. Cả hai hạng ≤ 4 . 768×4 : $\text{null} \subset \mathbb{R}^4$. 4×768 : $\text{null} \subset \mathbb{R}^{768}$, nullity ≥ 764 .
6. $ABx = A(Bx)$. Mọi đầu ra của AB là đầu ra của $A \Rightarrow \leq \text{rank } A$.
 B ép x vào rank B chiều trước; A không tạo thêm chiều $\Rightarrow \leq \text{rank } B$.
7. Khoảng 50 (49 chiều giữ 99% năng lượng). Không duy nhất:
hạng hiệu dụng phụ thuộc ngưỡng bạn chọn.
8. $\text{rank}(U \cdot V) \leq 8$. Giả định: thay đổi cần cho tác vụ nằm trong ít hướng.
Khi nào sai là câu hỏi nghiên cứu còn mở, đừng tìm đáp án đóng.

Bài tập giấy

1. Hàng 1 = 2 $\times$ hàng 2, hàng 3 = 3 $\times$ hàng 2 $\Rightarrow$ hạng 1.
null 2 chiều: $\text{span}\{(-2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$.
2. $[[2,3],[4,6]]$ (cột = nơi e_1, e_2 đáp xuống): cột 2 = 1,5 $\times$ cột 1 $\Rightarrow$ hạng 1,
bóp lên đường $y = 2x$.
3. Ví dụ $(1, 2, 3) \otimes (1, 1, 1)$: mọi hàng là bội của $(1, 1, 1)$; null 2 chiều.