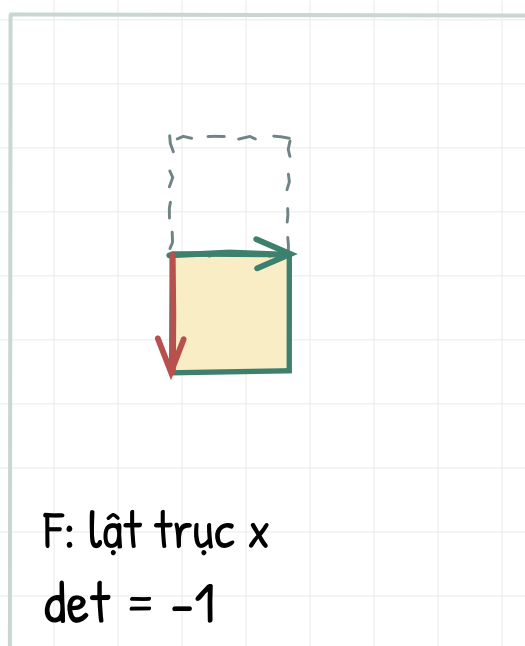
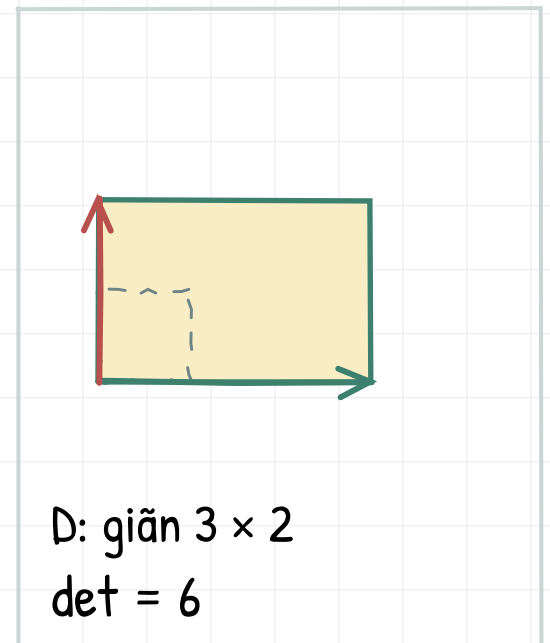
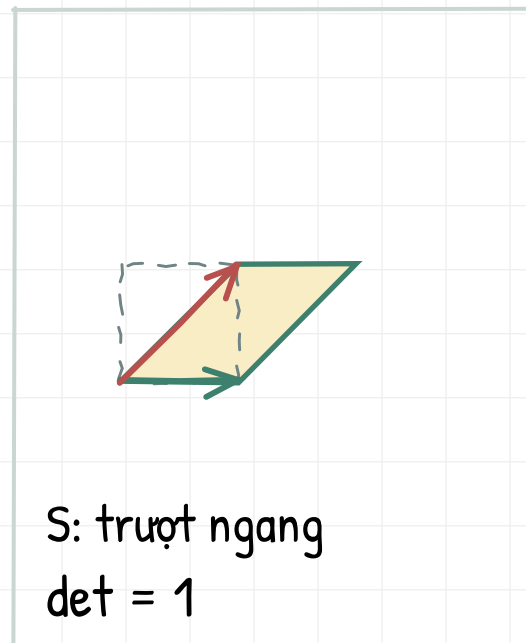
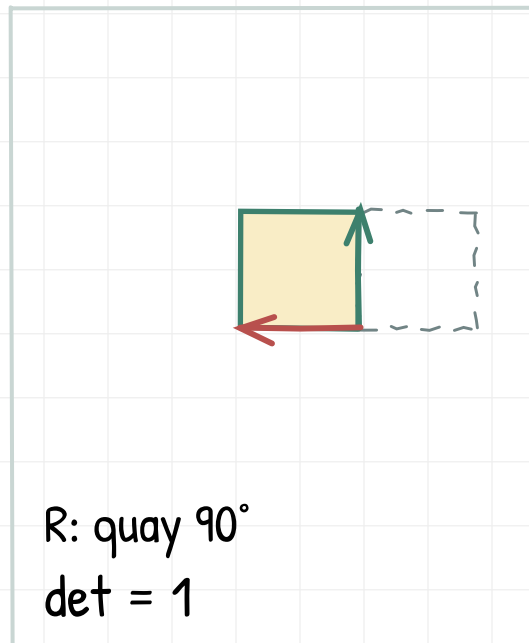


Năm ma trận, năm con số

Ảnh của hình vuông đơn vị qua từng ma trận (nét đứt = hình gốc):



$\hat{i}$ đáp ở cột 1 (mũi tên xanh), $\hat{j}$ ở cột 2 (đỏ): hai cạnh của hình ảnh.

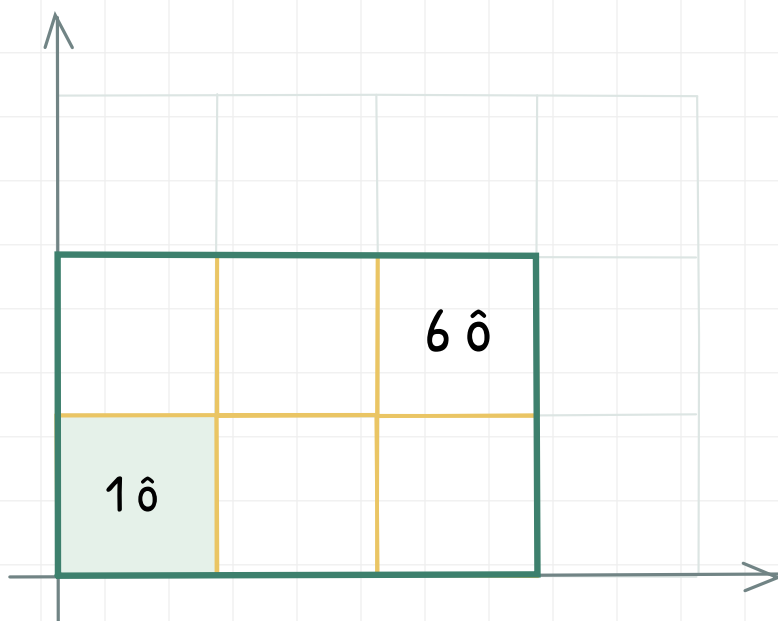
Đoán trước khi đọc

- Vì sao quay và trượt ra CÙNG một số?
- Vì sao D ra 6, khi trong ma trận chỉ có 3 và 2?
- Vì sao F ra số ÂM? Âm cái gì?
- Vì sao riêng A làm numpy báo Singular matrix?

Định thức đo co giãn diện tích

$\det(M)$ = hệ số phình / teo diện tích của MỌI vùng.

$\det = 2$: mọi vùng to gấp đôi. $\det = 0,5$: mọi vùng teo còn nửa.



$D = [[3,0],[0,2]]$: hình vuông $\rightarrow$ chữ nhật $3 \times 2 = 6$ ô

Vì sao MỘT số đủ cho cả không gian? Phép tuyến tính giữ đường thẳng vẫn thẳng, song song vẫn song song (bài 2) $\Rightarrow$ lưới vuông thành lưới bình hành đều, mọi ô phình đúng cùng một tỉ lệ. Đo một ô là biết tất cả.

Công thức duy nhất cần thuộc

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \det = a \cdot d - b \cdot c$$

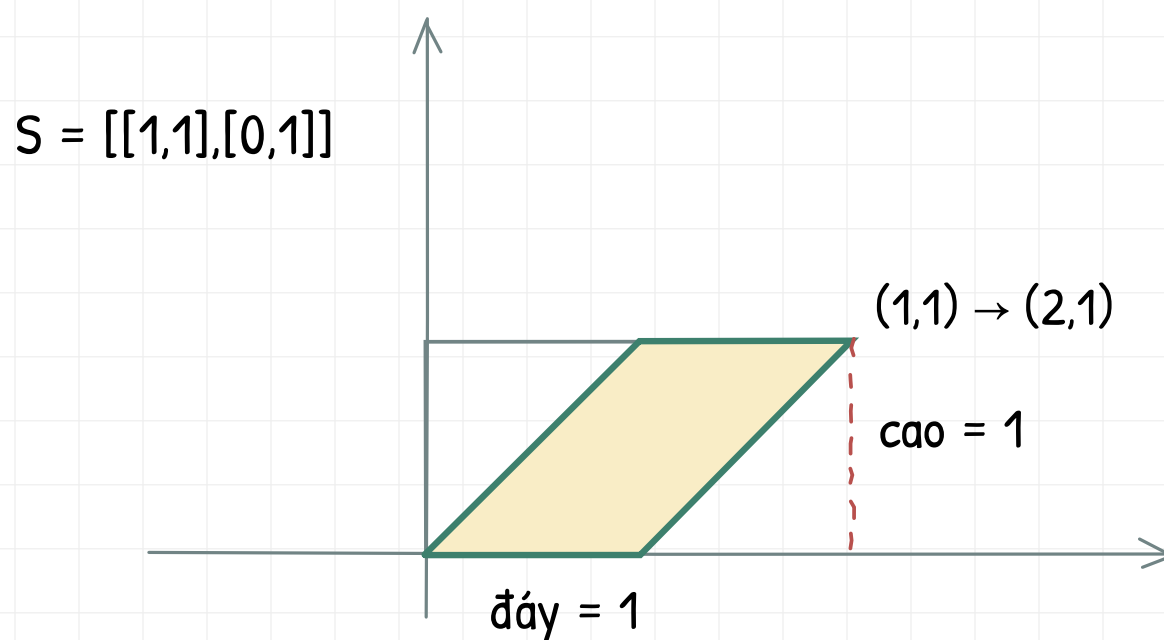
Hai cột = hai cạnh của hình bình hành ảnh (i, j đáp xuống đâu).

Kiểm bằng công thức dây giày (không biết gì về ma trận): khớp cả 5.

Quay và trượt: méo, diện tích giữ

$$R = [[0, -1], [1, 0]]: \det = 0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 = 1$$

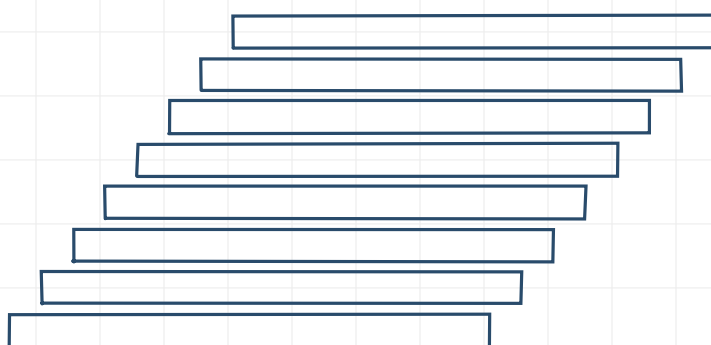
Quay góc bất kỳ (30° , 45° , 90° , 137°): $\det$ luôn $= 1$.



$S: \det = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1$. Hình bình hành: đáy $\times$ cao $= 1 \times 1 = 1$.

Đỉnh trên bị đẩy sang phải nhưng vẫn ở độ cao 1.

Cổ bài bị xô nghiêng

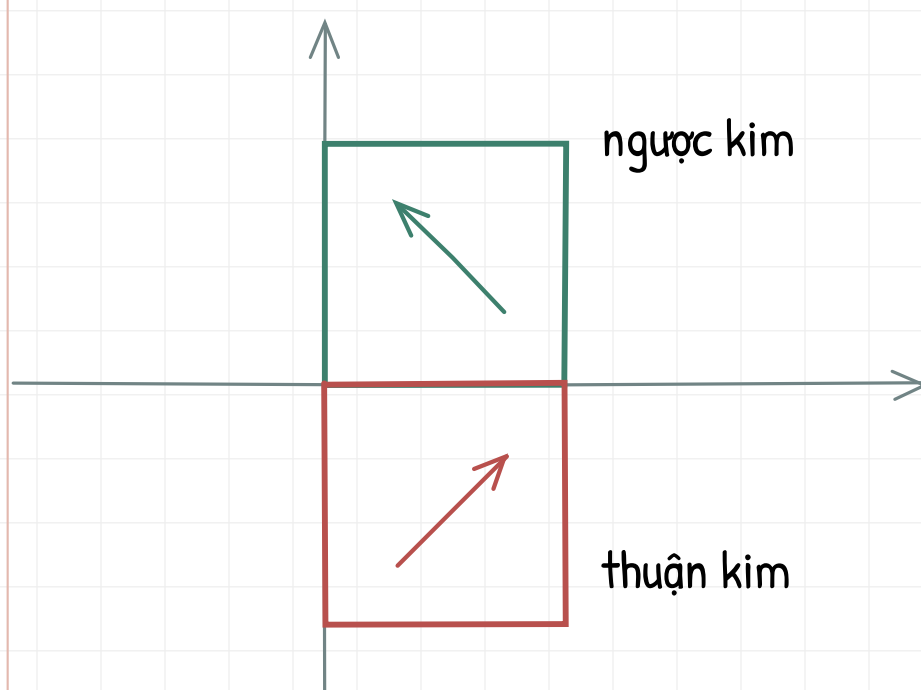


Méo đi, nhưng số lá không đổi:
mỗi lá chỉ trượt ngang, không lá
nào dày lên hay mỏng đi.

Shear giữ nguyên diện tích. "Méo" và "to ra" là hai chuyện khác nhau.

det âm: không gian bị lật

$$F = [[1,0],[0,-1]]: \det = 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = -1$$



Gốc: $(0,0) \rightarrow (1,0) \rightarrow (1,1) \rightarrow (0,1)$
đi NGƯỢC chiều kim đồng hồ.

Ảnh: $(0,0) \rightarrow (1,0) \rightarrow (1,-1) \rightarrow (0,-1)$
đi THUẬN chiều kim đồng hồ.

Quay thế nào cũng không trùng:
phải LẬT qua một trục.

$|\det|$ = co giãn bao nhiêu. Dấu của $\det$ = có lật hay không.

Kiểm nhanh 2D: đi từ $\hat{i}$ sang $\hat{j}$ trước biến đổi là quay ngược kim.

Sau biến đổi vẫn ngược kim $\Rightarrow \det > 0$; thành thuận kim $\Rightarrow \det < 0$.

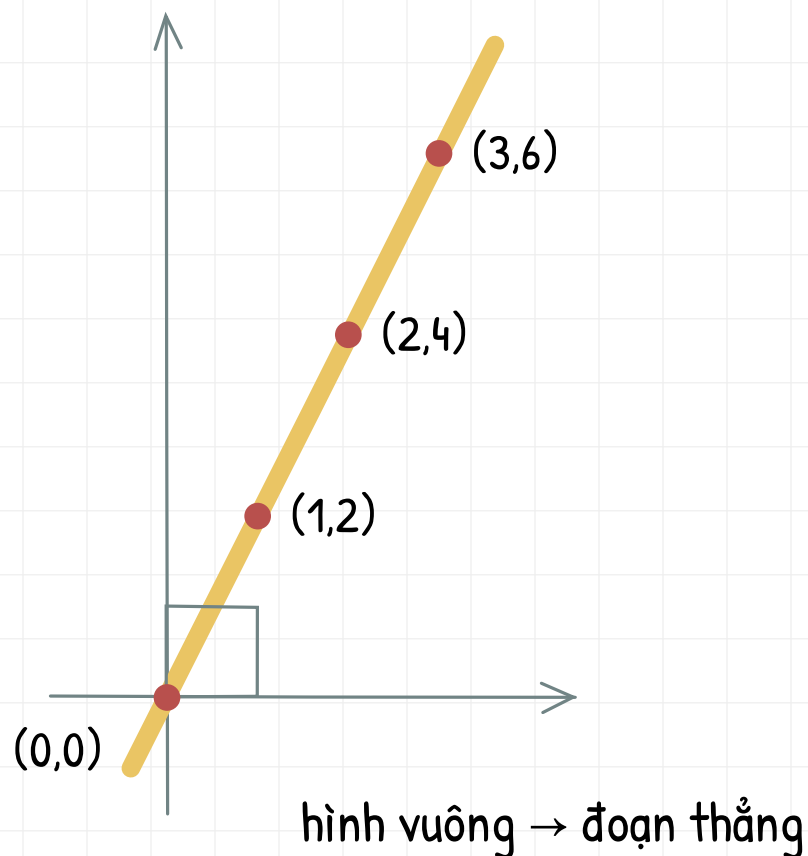
3D: bàn tay phải biến thành bàn tay trái.

Phép quay nào cũng có $\det = 1 > 0 \Rightarrow$ không phép quay nào lật được.

Bỏ qua được: định nghĩa "định hướng" chặt cho n chiều (hoán vị chẵn/lẻ).

det = 0: bóp dẹp, mất thông tin

$A = [[1,2],[2,4]]$: $\det = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$. Cột 2 = $2 \times$ cột 1 (bài 3: hạng 1).



Va chạm (hai vào, một ra):

$$A \cdot (1, 0) = (1, 2)$$

$$A \cdot (3, -1) = (1, 2)$$

Bị nghiền về gốc:

$$A \cdot (2, -1) = (0, 0) \leftarrow \text{null}$$

Bốn câu là MỘT câu

$\det(M) = 0 \Leftrightarrow$ không gian bị bóp xuống ít chiều hơn (diện tích 0)

$\Leftrightarrow$ hạng không đầy đủ (bài 3)

$\Leftrightarrow$ null space chứa vector khác 0

$\Leftrightarrow$ KHÔNG có nghịch đảo

det đánh mất gì mà hạng giữ?

ma trận 3×3	det	hạng	bóp $\mathbb{R}^3$ thành
diag(1, 1, 0)	0	2	một mặt phẳng
toàn số 1	0	1	một đường thẳng

det chỉ trả lời có/không. Thiếu BAO NHIÊU chiều thì cần hạng (bài 9: SVD).

Migration: DROP COLUMN = det 0, không viết được down.sql.

Nghịch đảo = phép biến đổi NGƯỢC

$M^{-1} \cdot M = I$ ("làm M rồi làm M^{-1} " = không làm gì)

M	M^{-1} là hành động	M^{-1}
R quay $+90^\circ$	quay -90°	$[[0,1],[-1,0]]$
S trượt phải	trượt trái	$[[1,-1],[0,1]]$
D giãn $\times 3, \times 2$	co còn $1/3, 1/2$	$[[1/3,0],[0,1/2]]$
F lật trục x	lật lại: chính F	F
A bóp dẹp	không tồn tại	Singular

Công thức 2×2 , tự chứng minh

$$M^{-1} = (1 / (ad - bc)) \cdot [[d, -b], [-c, a]]$$

Nhân thử: $[[a,b],[c,d]] \cdot [[d,-b],[-c,a]] = [[ad-bc, 0], [0, ad-bc]]$.

Chia cho $ad - bc$ là xong. Mẫu số CHÍNH LÀ định thức, không trùng hợp.

$\det = 0 \Rightarrow$ mẫu số 0: không phải công thức hỏng, mà vật thể không tồn tại.

$$D^{-1} = (1/6) \cdot [[2,0],[0,3]] = [[1/3,0],[0,1/2]]; \det(D^{-1}) = 1/6.$$

Làm liên tiếp $\Rightarrow$ hệ số co giãn nhân nhau: $\det(DF) = 6 \cdot (-1) = -6$.

Bẫy thứ tự: $(SR)^{-1} = R^{-1}S^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = SR$$

$$(SR)^{-1} = [[0,1],[-1,1]] = R^{-1}S^{-1} \checkmark$$

$$S^{-1}R^{-1} = [[1,1],[-1,0]] \times \text{khác hẳn}$$

Đi tất rồi đi giày $\Rightarrow$ cởi giày trước. Rollback: down.sql từ mới nhất về cũ.

Giải hệ: chạy ngược phép biến đổi

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ x + 3y &= 10 \end{aligned}$$

$$M \cdot v = b, M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, b = (5, 10)$$

"Tìm v mà sau khi bị M biến đổi thì đáp đúng chỗ b ."

$$\det(M) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 5 \quad M^{-1} = (1/5) \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$v = M^{-1} \cdot b = (0.6 \cdot 5 - 0.2 \cdot 10, -0.2 \cdot 5 + 0.4 \cdot 10) = (1, 3)$$

$$\text{Thử lại: } 2 \cdot 1 + 3 = 5 \checkmark, 1 + 3 \cdot 3 = 10 \checkmark$$

$\det = 0$: không có nghiệm DUY NHẤT

b	trên $y = 2x$?	số nghiệm
(3, 6)	có	vô số: (3,0), (1,1), ...
(3, 7)	không	không nghiệm nào

`np.linalg.solve` báo CÙNG một lỗi cho hai ca trái ngược nhau.

`lstsq` với $b = (3, 7)$ trả (0.68, 1.36), $A \cdot (0.68, 1.36) = (3.4, 6.8) \neq (3, 7)$:

điểm trên đường gần b nhất. Bình phương tối thiểu (bài 5).

Đừng tính inv để giải hệ

Hilbert 12×12 , nghiệm thật (1, ..., 1):

cách giải	$\ \text{sai số}\ $
<code>inv(H) @ b</code>	30.48 ← sai bét
<code>solve(H, b)</code>	0.836

`inv` làm tròn hai lần; `solve` khử Gauss một lần. `inv` để HIỂU, `solve` để CHẠY.

Cùng A , nhiều b : `factor` một lần (`lu_factor`) rồi `lu_solve` cho từng b .

Ba cái bẫy của định thức

01 |det| nhỏ KHÔNG có nghĩa là "gần suy biến"

ma trận	det	cond
$0.1 \cdot I_{10}$	$1e-10$	1.0 hoàn hảo
$[[1,1],[1,1+1e-10]]$	$1e-10$	$4.0e+10$ thảm họa

$\det(c \cdot M) = c^n \cdot \det(M)$: đổi mét $\rightarrow$ mm là det 10×10 nhân 10^{30} .

det hỏi có/không; cond hỏi "tồi đến mức nào". Code thật: kiểm cond.

02 Trên giấy 0, trên máy $-2.78e-17$

$\det([[1, 3], [0.1, 0.3]])$: $3 \times 0.1 = 0.3000000000000000004$.

matrix_rank vẫn đúng 1 (ngưỡng theo SVD).

Không viết $\text{if } \det(M) == 0$, kể cả $< 1e-9$ ($0.1 \cdot I_{10}$ bị kết oan).

03 Tràn số ở nhiều chiều

diag 100×100 toàn $1e-4$: det thật = $1e-400$, nhỏ hơn float64 chứa được.

`np.linalg.det` $\rightarrow 0.0$ $\leftarrow$ sai, và im lặng

`np.linalg.slogdet` $\rightarrow (1.0, -921.034) = (\text{dấu}, \log|\det|)$ ✓

3×3 tính tay (khai triển hàng 1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det = 1 \cdot (0 - 24) - 2 \cdot (0 - 20) + 3 \cdot (0 - 5)$$

$$= -24 + 40 - 15 = 1 \quad (\text{dấu } + - +)$$

Cofactor là ĐỊNH NGHĨA, $O(n!)$: $20! \approx 2.43e18$.

Thư viện dùng khử LU, $O(n^3)$.

Nối vào AI

LoRA

$\Delta W = B \cdot A$ ($5 \times 2 \cdot 2 \times 5$): hạng 2, $\det \approx -3e-49$.

$W + \Delta W$ vẫn hạng 5: cập nhật suy biến, trọng số cuối thì không.

PageRank

$x = (1-\alpha)(I - \alpha P)^{-1}e$, đồ thị $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow \{1,2\}$.

$\alpha = 0.85$: $\det = 0.3316875$. $\alpha = 1$: $\det = 0 \Rightarrow$ cần damping.

Gaussian

log-likelihood cần $\log|\det \Sigma|$; $\det$ tràn số.

$\Sigma = [[4,1],[1,1]]$: $\text{slogdet} = 1.0986 = \ln 3$.

Attention

W_Q là 768×64 : không vuông.

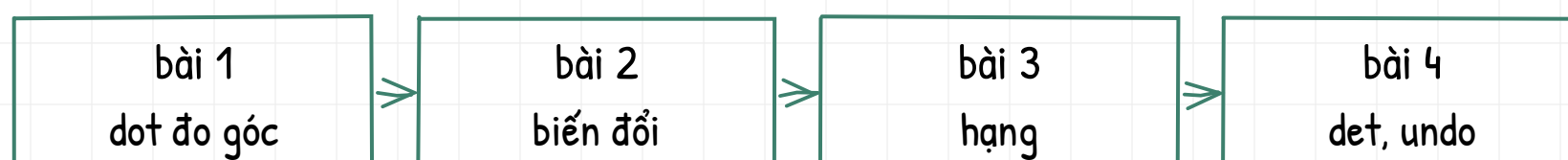
Không có $\det$, không có nghịch đảo. Chỉ còn HẠNG.

PageRank dạng đóng = lặp 500 bước: $(0.2148, 0.3974, 0.3878)$.

Định thức là bậc thang, không phải cái đích.

Gần như mọi ma trận trong deep learning không vuông, cái vuông thì hay suy biến có chủ ý (LoRA, MLA). $\det$ là cách rẻ nhất để hiểu ý

"bóp dẹp = mất thông tin = không undo được". Mang ý đó sang hạng và SVD.



Tự kiểm, rồi mới sang bài 5

1. Vì sao $\det$ chỉ cần MỘT số cho cả không gian? (đường thẳng vẫn thẳng...)
2. S làm hình vuông méo nhưng $\det(S) = 1$. Giải thích bằng đáy $\times$ chiều cao.
3. $\det < 0$ nghĩa là gì? Vì sao không phép quay 2D nào có $\det$ âm?
4. Bốn cách nói " $\det(M) = 0$ ": diện tích, hạng, null, nghịch đảo.
Vì sao chúng buộc phải là một?
5. Tìm hai vector khác nhau có cùng ảnh qua $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.
Lập luận A^{-1} không tồn tại bằng HÀM SỐ, không bằng mẫu số 0.
6. $(SR)^{-1} = R^{-1}S^{-1}$: giải thích bằng tất và giày, rồi bằng rollback.
7. Hai ma trận cùng $\det = 1e-10$, một hoàn hảo, một sắp sập. Kiểm gì?
8. W_Q có kích thước 768×64 . $\det$ của nó bằng bao nhiêu? (bẫy)

Câu 4 sâu nhất. Câu 5 tách người HIỂU khỏi người chỉ TÍNH được.

Bài tập tay (không xem đáp án)

1. $\det$ và M^{-1} của $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ bằng công thức 2×2 .
2. $\det$ của $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ khai triển theo CỘT 1. Vẫn ra 1?
3. Một ma trận 2×2 có $\det = -2$; nói bằng lời nó làm gì.
4. Giải $3x + 2y = 8$, $x + 4y = 6$ bằng $M^{-1} \cdot b$ trên giấy.

Mang sang bài 7

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$: $\det(M - \lambda I)$ với $\lambda = 0 \dots 4$ ra 3, 0, -1, 0, 3.

Hai λ làm $\det = 0$ là 1 và 3 = eigenvalue của M ; tích $1 \cdot 3 = \det(M)$.

R quay 90° : $\det(R - \lambda I) = \lambda^2 + 1$, không nghiệm thực. Vì sao? Giữ tới bài 7.

Đáp nhanh

1. Lưới vuông $\rightarrow$ lưới bình hành ĐỀU: mọi ô phình cùng tỉ lệ.
2. Đáy vẫn 1, đỉnh trên trượt ngang nhưng vẫn cao 1 $\Rightarrow 1 \times 1 = 1$.
3. Không gian bị lật (đổi định hướng). Quay giữ chiều đi vòng, $\det = 1$.
4. Diện tích 0 $\Leftrightarrow$ bóp xuống ít chiều $\Leftrightarrow$ hạng thiếu $\Leftrightarrow$ có hướng bị nghiêng về 0 ($\text{null} \neq \{0\}$) $\Leftrightarrow$ va chạm nên không undo được. Một hiện tượng.
5. $(1, 0)$ và $(3, -1)$ cùng ra $(1, 2)$. Hàm ngược phải trả MỘT đầu vào cho $(1, 2)$, nhưng có hai $\Rightarrow$ không tồn tại. Mẫu số 0 chỉ là hệ quả.
6. $SR =$ làm R rồi S. Undo: gỡ S trước (giày), rồi R (tất).
7. $\det$ nhảy thang đo (c^n). Kiểm cond hoặc giá trị suy biến nhỏ nhất.
8. Không có: $\det$ chỉ định nghĩa cho ma trận vuông. Hới hạng (≤ 64).

Bài tập tay

1. $\det = 4 \cdot 6 - 7 \cdot 2 = 10$. $M^{-1} = (1/10) \cdot [[6, -7], [-2, 4]] = [[0.6, -0.7], [-0.2, 0.4]]$.
2. $1 \cdot (1 \cdot 0 - 4 \cdot 6) - 0 + 5 \cdot (2 \cdot 4 - 3 \cdot 1) = -24 + 25 = 1 \checkmark$ (hàng hay cột đều ra 1).
3. Ví dụ $[[2, 0], [0, -1]]$: giãn ngang 2 lần rồi lật trục x; diện tích $\times 2$.
4. $\det = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 10$, $M^{-1} = (1/10) \cdot [[4, -2], [-1, 3]]$.
 $v = (1/10) \cdot (4 \cdot 8 - 2 \cdot 6, -8 + 3 \cdot 6) = (2, 1)$. Thử: $6 + 2 = 8$, $2 + 4 = 6 \checkmark$