

Một mũi tên, hai cách ghi

$P = [[2, -1], [1, 1]]$: cơ sở mới $b_1 = (2, 1)$, $b_2 = (-1, 1)$

$R = [[0, -1], [1, 0]]$: quay 90° trong hệ CHUẨN

$$P \cdot (1, 1) = (1, 2)$$

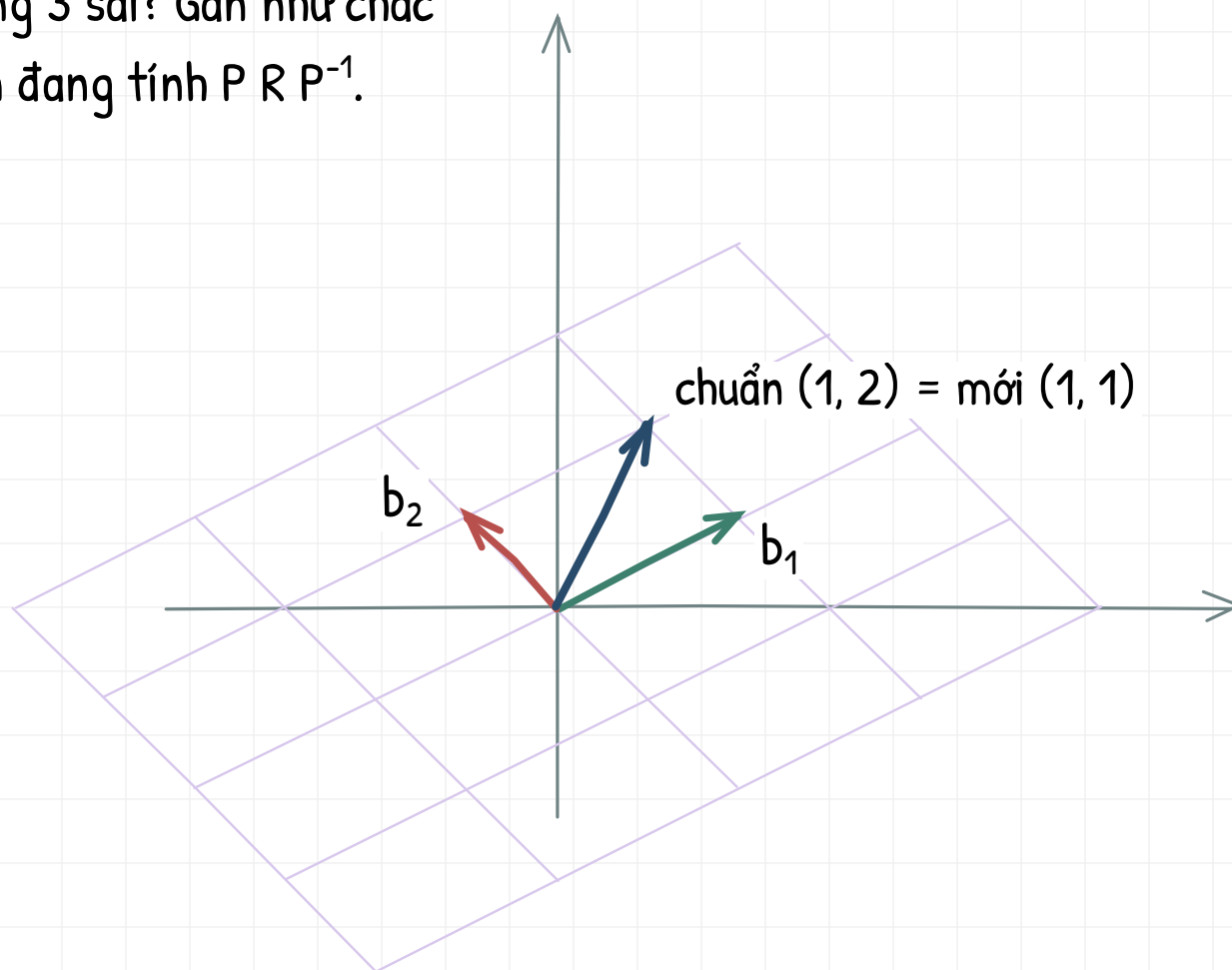
$$P^{-1} \cdot (3, 0) = (1, -1)$$

$$P^{-1}RP = [[1/3, -2/3], [5/3, -1/3]]$$

$$(P^{-1}RP) \cdot (3, 0) = (1, 5)$$

Tự viết inv2 cho 2×2 bằng công thức tay, không dùng `np.linalg.inv`.

Dòng 3 sai? Gần như chắc bạn đang tính $P R P^{-1}$.



Hệ tọa độ là một LỰA CHỌN

Mũi tên là thật. Cặp số là bản ghi chép.

$v = (3, 0)$ ngầm nghĩa: 3 bước theo $\hat{i} = (1, 0)$, 0 bước theo $\hat{j} = (0, 1)$.
 $\hat{i}, \hat{j}$ không phải sự thật của vũ trụ: chỉ là hai cây thước dùng chung.
Đổi cơ sở không đụng tới mũi tên, chỉ đổi cách ghi chép.

Backend	Vector
một instant thật	một mũi tên
2026-08-15T14:00+07:00	tọa độ trong hệ A
2026-08-15T07:00Z	tọa độ cùng mũi tên, hệ B
timezone	cơ sở
localToUtc / utcToLocal	P / P^{-1}

Hai chuỗi khác nhau, cùng một khoảnh khắc.
Bug "sao giờ lệch 7 tiếng?" = quên mình đang ở hệ tọa độ nào.
Bài này là đúng bug đó, viết bằng ma trận.

☆ Trong hệ của chính nó, b_1 có tọa độ $(1, 0)$. Mọi cơ sở tự thấy mình "vuông vắn". "Nghiêng" chỉ là điều một hệ nói về hệ kia.

P: từ hệ MỚI về hệ CHUẨN

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$
 b_1

$\downarrow$
 b_2

Cột của P = nơi $\hat{i}, \hat{j}$ đáp xuống (bài 2)

$\Rightarrow P$ biến $\hat{i} \rightarrow b_1, \hat{j} \rightarrow b_2$.

$$P \cdot (1, 1) = 1 \cdot (2, 1) + 1 \cdot (-1, 1) = (1, 2)$$

P nhận toạ độ MỚI, trả toạ độ CHUẨN (localToUtc).

Bấy đất nhất: cột của P viết bằng hệ chuẩn $\Rightarrow$ đầu ra của P cũng hệ chuẩn.

Cơ sở hợp lệ $\Leftrightarrow \det(P) \neq 0$. Ở đây $\det = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 3$. $\det = 0$: thước gãy.

Đi ngược: P^{-1}

$$P^{-1} = (1/3) \cdot [[1, 1], [-1, 2]] \quad (\text{đổi chéo, đổi dấu, chia det})$$

$$P^{-1} \cdot (3, 0) = (1/3) \cdot (3, -3) = (1, -1)$$

$$\text{Kiểm ngược, LUÔN làm: } 1 \cdot b_1 - 1 \cdot b_2 = (2, 1) - (-1, 1) = (3, 0) \checkmark$$

mũi tên	hệ CHUẨN	hệ MỚI (b_1, b_2)
b_1	(2, 1)	(1, 0)
b_2	(-1, 1)	(0, 1)
	(1, 2)	(1, 1)
	(3, 0)	(1, -1)
	(6, 3)	(3, 0)

A' = P⁻¹AP: đọc từ phải sang trái

Cần A' làm việc tron trong hệ mới: vào toạ độ mới, ra toạ độ mới.

$$A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

③

②

①

buớc	làm gì	backend
① P	toạ độ của tôi (mới) → chuẩn	localToUtc(t)
② A	biến đổi ở hệ A biết nói	addOneHour(utc)
③ P ⁻¹	kết quả (chuẩn) → hệ của tôi	utcToLocal(r)

```
const addHourLocal = (t) => toLocal(addHourUtc(toUtc(t)))
```

③

②

①

A' không phải phép mới: đúng A cũ, bọc hai lớp phiên dịch.

Vì sao không đảo được thứ tự

- A' ăn toạ độ MỚI ⇒ thứ đầu tiên gặp phải là P (chỉ P nhận toạ độ mới).
- A chỉ ăn toạ độ CHUẨN ⇒ P chạy TRƯỚC A.
- A nhả toạ độ chuẩn ⇒ P⁻¹ ở CUỐI để dịch về. Không phải quy ước: ràng buộc kiểu.

Cách đọc thứ hai: cột của A'

cột j của A' = toạ độ (trong hệ mới) của A.b_j.
Định nghĩa không nhắc tới P⁻¹AP; công thức chỉ là hệ quả.

Quay 90° nhìn từ hệ nghiêng

Bước 1, R·P theo cột:

$$R \cdot b_1 = R \cdot (2, 1) = (-1, 2)$$

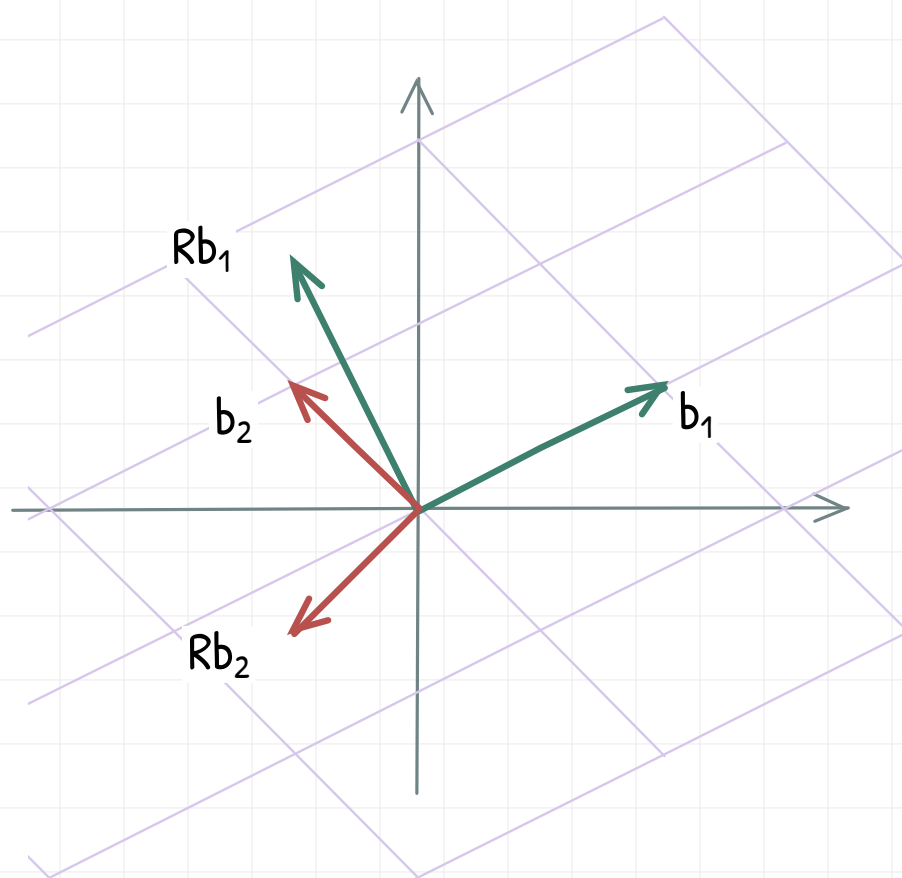
$$R \cdot b_2 = R \cdot (-1, 1) = (-1, -1)$$

Bước 2, nhân P^{-1} bên trái:

$$P^{-1} \cdot (-1, 2) = (1/3) \cdot (1, 5)$$

$$P^{-1} \cdot (-1, -1) = (1/3) \cdot (-2, -1)$$

$$R' = P^{-1}RP = (1/3) \cdot [[1, -2], [5, -1]]$$



Cột 1 của $R' = (1/3, 5/3)$:

toạ độ mới của $R \cdot b_1 = (-1, 2)$.

Cột 2 = $(-2/3, -1/3)$:

toạ độ mới của $R \cdot b_2$.

R' xấu, đầy phân số, chẳng đối xứng gì. Nhưng nó LÀ phép quay 90° : chỉ là đo bằng hai thước nghiêng.

Y như 07:00Z chẳng "trông giống" hai giờ chiều.

Kiểm hai đường đi: không được bỏ

Vector có toạ độ (3, 0) trong hệ MỚI:

Đường 1: ① $P \cdot (3,0) = (6, 3)$ ② $R \cdot (6,3) = (-3, 6)$

③ $P^{-1} \cdot (-3,6) = (1/3) \cdot (3, 15) = (1, 5)$

Đường 2: $R' \cdot (3,0) = 3 \cdot (1/3, 5/3) = (1, 5)$ ✓ khớp, số nguyên

c (mới)	P.c	R.(P.c)	đường 1	đường 2
(3, 0)	(6, 3)	(-3, 6)	(1, 5)	(1, 5)
(1, 1)	(1, 2)	(-2, 1)	(-1/3, 4/3)	(-1/3, 4/3)
(0, 3)	(-3, 3)	(-3, -3)	(-2, -1)	(-2, -1)
(2, -1)	(5, 1)	(-1, 5)	(4/3, 11/3)	(4/3, 11/3)

Một hàng lệch $\Rightarrow$ bạn đã đảo chiều P ở đâu đó.

Cách tự bắt bug duy nhất đáng tin của bài: test so hai đường tính khác nhau, thay vì tin vào một đường.

Làm trên giấy, không mở file

Tự chọn một vector, đi đủ hai đường. Làm được là xong bài 6.

Không làm được thì đọc lại tờ 4 (thứ tự ① ② ③), đừng đọc tờ 5.

Cái gì KHÔNG đổi khi đổi cơ sở

đại lượng	R	R'	
trace	$0 + 0 = 0$	$1/3 - 1/3 = 0$	bằng
det	$0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 = 1$	$-1/9 + 10/9 = 1$	bằng
hạng	2	2	bằng

det = 1: quay không đổi diện tích. Tính chất của CÚ XOAY, không của bảng số.

Hạng không đổi (trả nợ bài 3)

$\text{hạng}(P^{-1}AP) \leq \text{hạng}(A)$ (bài 3: nhân thêm chỉ có thể mất chiều)
 $\text{hạng}(A) = \text{hạng}(P \cdot (P^{-1}AP) \cdot P^{-1}) \leq \text{hạng}(P^{-1}AP)$
 $\Rightarrow$ bằng nhau. Mấu chốt: P khả nghịch, không có null, không nghiêng chiều nào.

Bất biến qua $P^{-1}(\cdot)P \Rightarrow$ thuộc về HÀNH ĐỘNG, không về CÁCH GHI.

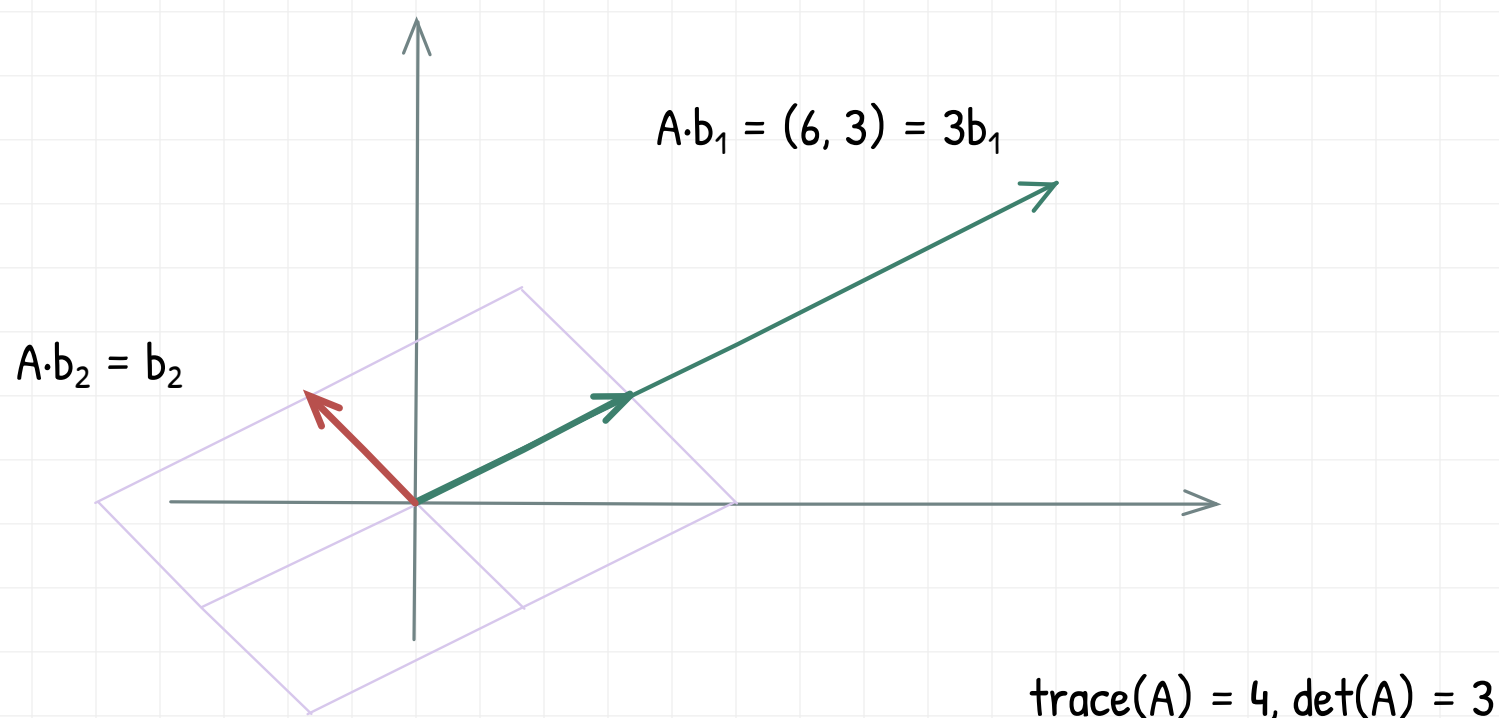
Bốn thứ bất biến: trace, det, hạng, và (bài 7) tập eigenvalue.
Công thức ML dùng trace hay log det (entropy Gauss, KL hai Gauss) là đang cố ý chọn thứ không phụ thuộc hệ tọa độ.

Ngược lại, từng phần tử $A[i][j]$ KHÔNG bất biến:
"trọng số hàng 3 cột 7 lớn nên chiều đó quan trọng" là câu về cách ghi.

Chọn thước kẻ: ma trận thành chéo

Trong hệ b_1, b_2 : kéo giãn theo b_1 gấp 3, giữ b_2 . $D' = \text{diag}(3, 1)$

Cùng phép đó trong hệ chuẩn: $A = P D' P^{-1} = (1/3) \cdot [[7, 4], [2, 5]]$



Một đồng số trông ngẫu nhiên, hay $\text{diag}(3, 1)$: CÙNG một phép.

Và nó trả tiền: lũy thừa

$(P D P^{-1})^{10} = P D (P^{-1}P) D \dots D P^{-1} = P D^{10} P^{-1}$: lũy thừa số vô hướng thì rẻ.

$A = [[2,1],[1,2]]$, cơ sở $(1,1), (1,-1)$: $A^{10} = [[29525, 29524], [29524, 29525]]$,

$3^{10} = 59049$, $29525 = (59049 + 1)/2$. Hai cách lệch 0.0.

Như dựng index: dữ liệu không đổi, đổi cách lưu để đổi Big-O.

Cơ sở nào làm A thành chéo? Đó là toàn bộ bài 7.

Hai cái bầy, một món quà

01 Nhầm chiều P (~90% lỗi của bài)

$$P^{-1}RP = (1/3) \cdot [[1, -2], [5, -1]]$$

$$PRP^{-1} = (1/3) \cdot [[1, -5], [2, -1]] \leftarrow \text{KHÁC}$$

bạn muốn

dùng

A (chuẩn) $\rightarrow$ viết lại trong hệ mới

$$P^{-1}AP$$

A' (mới) $\rightarrow$ viết lại trong hệ chuẩn

$$PA'P^{-1}$$

Tự kiểm: ma trận ngoài cùng bên PHẢI có nhận đúng loại tọa độ không?

02 Tưởng A' là phép khác

A và A' ĐỒNG DẠNG (similar): cùng hành động, khác ngôn ngữ mô tả.

Bỏ qua được: ký hiệu $[T]_B$, ${}_B[T]$. Học LUẬT CHIỀU, đừng học ký hiệu.

Món quà: cơ sở trực chuẩn

$$Q = [[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}], [1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]] \quad (b_1 = (1,1)/\sqrt{2}, b_2 = (-1,1)/\sqrt{2})$$

$$Q^{-1} = Q^T$$

Nghịch đảo miễn phí: chỉ chuyển vị. Không giải hệ, không chia det,

không lo sai số khi det gần 0. Vì thế PCA, SVD, QR bám lấy ma trận trực giao.

$Q^T R Q = R$: quay 90° nhìn từ hệ đã xoay vẫn là quay 90° (xoay giao hoán với xoay).

P suy biến $[[1,2],[2,4]]$: inv2 tự viết ném lỗi. Bỏ assert thì numpy chỉ

in warning rồi trả nan: hổng im lặng nguy hiểm hơn hổng gào lên.

Toạ độ = dot với cơ sở ĐỐI NGẪU

Thói quen bài 1: muốn biết v dùng bao nhiêu b_1 , lấy $b_1 \cdot v$. Thử $v = (3, 0)$:

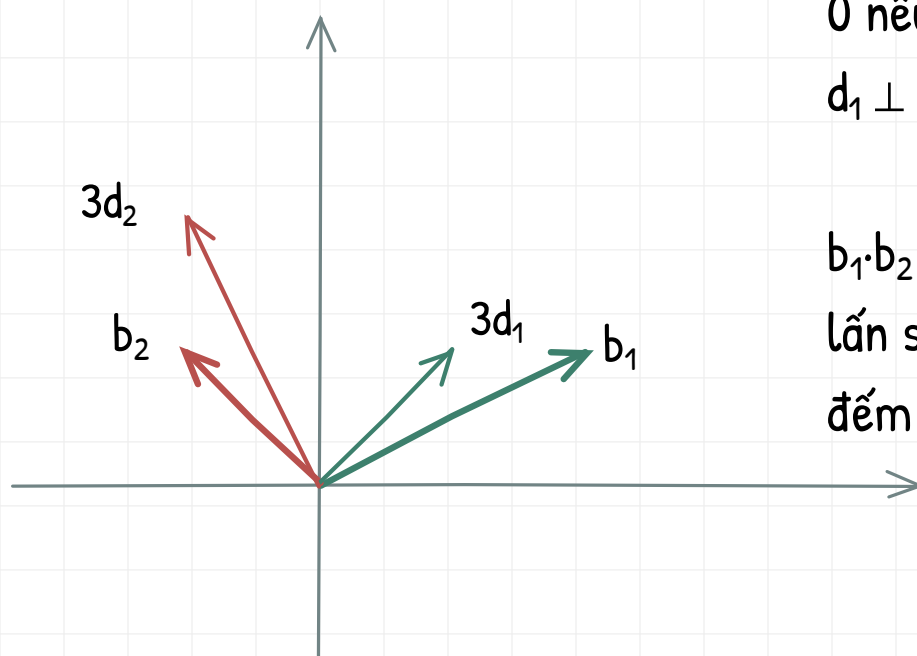
đọc bằng $b_i \cdot v$: $(b_1 \cdot v, b_2 \cdot v) = (6, -3) \leftarrow \text{SAI}$

đúng $(P^{-1}v)$: $(1, -1)$

Đọc $P^{-1}v$ theo HÀNG: hàng i của P^{-1} là d_i , và $c_i = d_i \cdot v$.

$$d_1 = (1/3, 1/3) \quad c_1 = d_1 \cdot v = 1$$

$$d_2 = (-1/3, 2/3) \quad c_2 = d_2 \cdot v = -1$$



$$P^{-1}P = I \Rightarrow d_i \cdot b_j = 1 \text{ nếu } i = j, \\ 0 \text{ nếu khác.}$$

$$d_1 \perp b_2, \quad d_2 \perp b_1.$$

$b_1 \cdot b_2 = -1 \neq 0$: một phần b_2 lẫn sang hướng b_1 , nên $b_1 \cdot v$ đếm luôn phần lẫn đó.

Trực chuẩn: $P^{-1} = P^T \Rightarrow d_i = b_i$.

Thói quen bài 1 hoá ra đúng. Q ở tờ 9: $Q^T \cdot (3, 0) = (2.1213, -2.1213)$.

Probe tự định nghĩa thường lệch nhau $\Rightarrow V @ x$ cho toạ độ SAI, dùng nghịch đảo.

Nối vào AI

Embedding

Quay mọi vector bằng Q trực giao: mọi cosine giữ nguyên.

100 vector 768 chiều: lệch tối đa $3e-15$. "Chiều 42 nghĩa là gì?" là câu sai.

Chéo hoá

$P^{-1}AP$, eigendecomposition (bài 7).

Power iteration của PageRank: lặp để về trục trội nhất.

PCA

Cơ sở trục chuẩn đồn phương sai vào vài trục đầu.

Nén = đổi hệ toạ độ rồi cắt bớt (bài 9).

$$Q^{-1} = Q^T$$

SVD, QR, khởi tạo trực giao cho RNN.

Lý do thư viện tránh gọi `inv()`.

Attention

W_Q, W_K đưa token sang "không gian truy vấn / khoá".

Đổi cách mô tả để so khớp dễ hơn, rồi QK^T đo góc.

LoRA

$\Delta W = BA$ hạng r .

Chỉ cho thay đổi bên trong một cơ sở r chiều.

Bài 6: hành động là thật; bảng số là ảnh chụp từ một góc máy.

Bài 7 hỏi tiếp: có góc máy nào ĐẸP NHẤT không?

Tự kiểm, rồi mới sang bài 7

1. Cột của P viết trong hệ nào? Suy ra P dịch từ hệ nào sang hệ nào.
2. Giải thích $A' = P^{-1}AP$ bằng ba câu hành động, rồi bằng timezone.
3. Vì sao KHÔNG thể là PAP^{-1} ? Lập luận "ma trận ăn tọa độ loại nào".
4. Mọi cơ sở tự thấy mình là "hệ chuẩn". Chữ "chuẩn" mang thông tin gì?
5. R và R' khác từng phần tử nhưng cùng trace, det, hạng. Vì sao PHẢI vậy?
Chứng minh hạng trong 2 dòng; chỗ nào dùng P khả nghịch?
6. Cơ sở trực chuẩn: $P^{-1} = P^T$. Hai lợi ích: tốc độ và sai số.
7. Quay cả kho embedding lẫn truy vấn bằng Q trực giao: thứ hạng đối thế nào? Một chiều đơn lẻ có mang nghĩa riêng không?
8. Muốn $P^{-1}AP$ chéo, hai cột của P phải đặc biệt thế nào?
("khi A tác động lên chúng thì...")

Câu 7 sâu nhất. Trả lời được câu 8 là tự phát minh ra eigenvector.

Mang sang bài 7

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$: $A \cdot (1, 1) = (3, 3) = 3 \cdot (1, 1)$, $A \cdot (1, -1) = 1 \cdot (1, -1)$.

Hai vector KHÔNG đối hướng. Lấy làm cơ sở $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \text{diag}(3, 1)$.

Lúc nào cũng tìm được không? Tìm bằng cách nào? Và vì sao chính câu đó cho Google xếp hạng cả web bằng một phép nhân ma trận lặp lại?

Đáp nhanh

1. Hệ CHUẨN (không thì không ai đọc được). $\Rightarrow$ P: tọa độ mới $\rightarrow$ chuẩn.
2. Dịch sang hệ A biết nói $\rightarrow$ làm A ở đó $\rightarrow$ dịch ngược về hệ của tôi.
 $\text{localToUtc} \rightarrow \text{addOneHour} \rightarrow \text{utcToLocal}$.
3. A' ăn tọa độ mới, mà PAP^{-1} cho P^{-1} ăn trước: P^{-1} ăn tọa độ chuẩn $\Rightarrow$ sai kiểu.
4. Không mang gì: chỉ là cây thuốc mọi người mặc định dùng chung.
5. Chúng thuộc HÀNH ĐỘNG. Hạng: $\text{rank}(P^{-1}AP) \leq \text{rank } A$ và ngược lại;
cần P, P^{-1} tồn tại để đi được cả hai chiều.
6. Nghịch đảo = chuyển vị (không giải hệ); không chia det nên không
khuếch đại sai số.
7. Không đổi: dot (và cosine) bảo toàn qua Q. Một chiều đơn lẻ không có
nghĩa riêng; chỉ QUAN HỆ giữa các vector mới có.
8. $A \cdot b_j = \lambda_j \cdot b_j$: không đổi hướng, chỉ co giãn $\Rightarrow$ cột j của A' là $(0, \dots, \lambda_j, \dots, 0)$.