

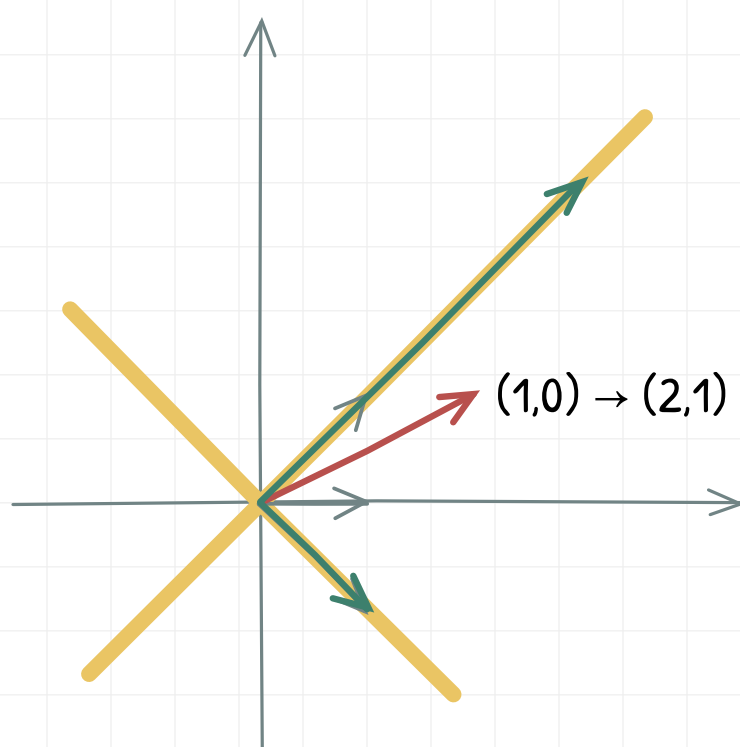
Vector nào GIỮ hướng?

$B = [[2,1],[1,2]]$ trên ba vector:

$(1, 0) \rightarrow (2, 1)$ đổi hướng

$(1, 1) \rightarrow (3, 3)$ cùng hướng, dài $\times 3 \Rightarrow \lambda = 3$

$(1, -1) \rightarrow (1, -1)$ đứng im hoàn toàn $\Rightarrow \lambda = 1$



Trục vàng: hai hướng
sống sót qua B .

Mọi vector khác bị
vừa giãn vừa XOAY lệch.

$R = [[0,-1],[1,0]]$ (quay 90°) trên ba vector:

$(1, 0) \rightarrow (0, 1)$ $(1, 1) \rightarrow (-1, 1)$ $(3, 2) \rightarrow (-2, 3)$

Tất cả quay đi. R KHÔNG có eigenvector thực nào.

Bạn vừa thấy toàn bộ định nghĩa, trước khi đọc lý thuyết.

Ba dòng R là cái bẫy lớn nhất của bài (tờ 6).

Định nghĩa ngắn hơn bạn tưởng

$$A v = \lambda v, \quad v \neq 0$$

Eigenvector: KHÔNG bị đổi hướng, chỉ co hoặc giãn.

Eigenvalue λ : hệ số co giãn đó.

"Cả một phép biến đổi phức tạp, trên v , chỉ là nhân với một số."

Vế trái n^2 phép nhân, vế phải n : trên đúng những hướng đó, $O(n^2) \rightarrow O(n)$.

câu hỏi

trả lời

$v = 0$ có tính không?

Không: $A \cdot 0 = \lambda \cdot 0$ với MỌI λ

$\lambda = 0$ hợp lệ?

Có: $\lambda = 0$ có mặt $\Leftrightarrow \det(A) = 0$

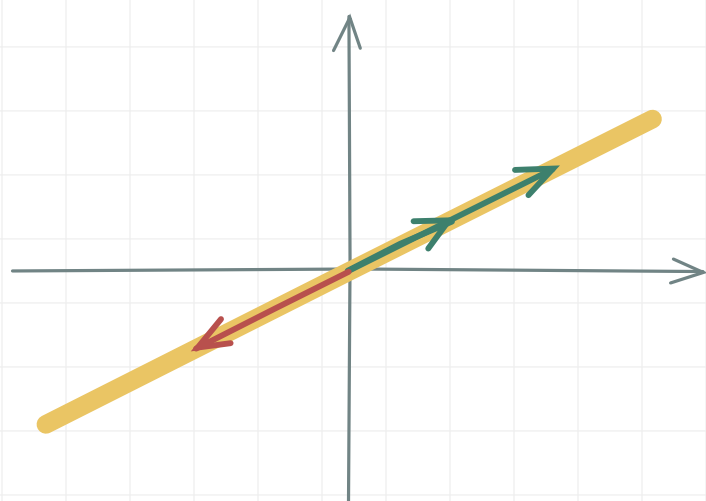
$2v, -v, 100v$?

Cũng là eigenvector, cùng λ

Ngược hướng ($\lambda < 0$)?

Vẫn tính: cùng TRỤC

Eigenvector là một TRỤC, không phải một mũi tên.



numpy trả mũi tên dài 1
chỉ vì phải in ra một cái gì:
dấu và độ dài KHÔNG mang
thông tin.

Vì sao lại là $\det(A - \lambda I) = 0$

$$A v = \lambda v$$

$$A v - \lambda v = 0$$

$$A v - \lambda I v = 0 \quad \leftarrow \text{chèn } I \text{ để } \lambda \text{ thành MA TRẬN}$$

$$(A - \lambda I) v = 0$$

λ là số, A là ma trận: không trừ trực tiếp được. Chèn I = ép cùng kiểu (cast).

Nhìn bằng bài 2 và bài 4

$(A - \lambda I)$ ăn một v KHÁC 0 và nhả ra 0 $\Rightarrow$ nó bóp dẹp không gian:

cả một trục bị nén về gốc (v nằm trong null space).

Bóp dẹp $\Rightarrow$ diện tích 0 $\Rightarrow$ định thức bằng 0.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Khai triển: đa thức đặc trưng bậc n theo λ ; nghiệm = eigenvalue.

bước	làm gì
1	viết $\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow$ đa thức đặc trưng
2	giải ra $\lambda_1, \lambda_2, \dots$
3	mỗi λ : giải $(A - \lambda I)v = 0 \rightarrow$ trục

2x2 rút gọn

$$\lambda^2 - \text{trace}(A) \cdot \lambda + \det(A) = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = \text{trace}, \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det$$

Ví dụ 1: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 \cdot 0 = (3 - \lambda)(2 - \lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2. \text{ Kiểm: trace } 5 = 3 + 2, \det 6 = 3 \cdot 2 \checkmark$$

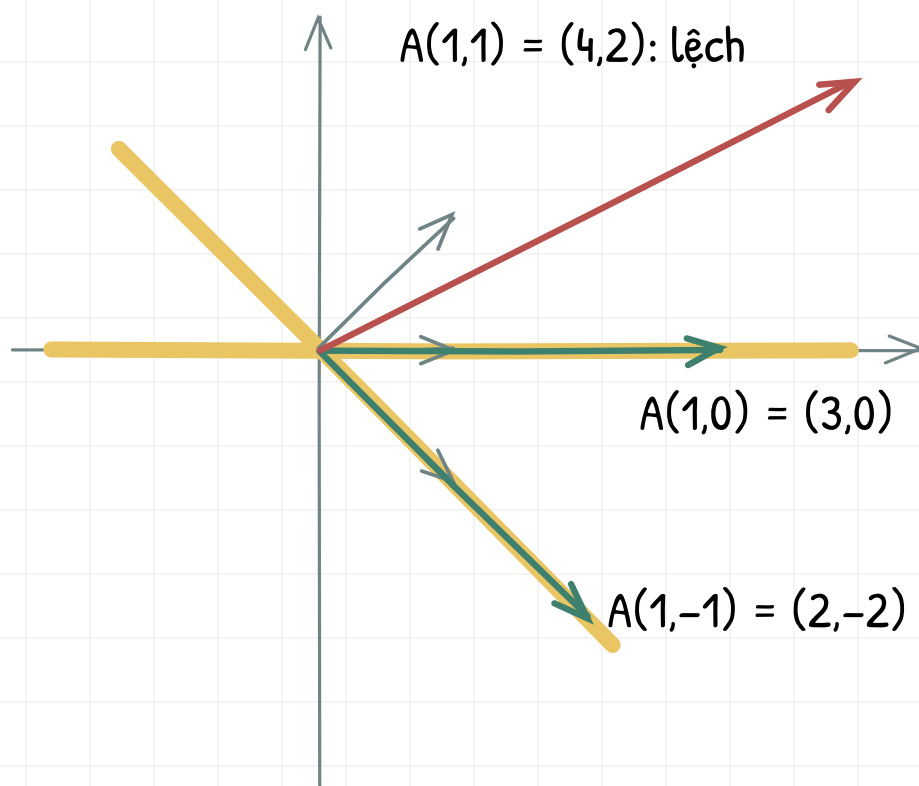
Tam giác $\Rightarrow$ eigenvalue = đường chéo, không cần tính gì.

$$\lambda = 3: A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow v_1 = (1, 0)$$

$$\lambda = 2: A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = -x \Rightarrow v_2 = (1, -1)$$

Dấu hiệu làm đúng: sau khi trừ λI , hệ luôn THỪA một dòng.

Ra nghiệm duy nhất $v = 0$ thì bạn giải sai λ (assert tự nhiên).



$v_1 \cdot v_2 = 1 \neq 0$:
hai trục lệch 45° ,
KHÔNG vuông góc.

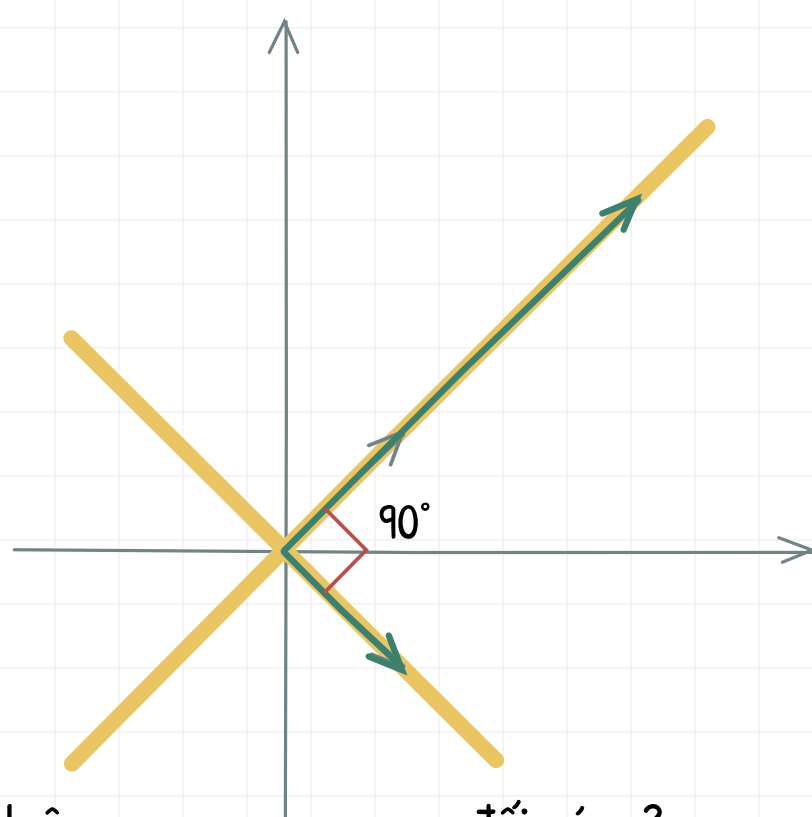
numpy: cột 2 =
 $(-0.707, 0.707)$:
cùng trục, khác
dấu và độ dài.

Ví dụ 2: $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ đối xứng

$$\text{trace } 4, \det 3: \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) \Rightarrow \lambda = 3, 1$$

$$\lambda = 3: B - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow y = x \Rightarrow v_1 = (1, 1)$$

$$\lambda = 1: B - I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow y = -x \Rightarrow v_2 = (1, -1)$$



$$v_1 \cdot v_2 = 1 - 1 = 0 \\ \Rightarrow \text{VUÔNG GÓC.}$$

ma trận	đối xứng?	góc 2 trục
$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	không	45°
$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	CÓ	90°

Đối xứng $\Rightarrow$ eigenvalue thực, eigenvector trực giao (định lý phổ).

Nhớ KẾT LUẬN, chưa cần chứng minh. Ma trận hiệp phương sai luôn đối xứng $\Rightarrow$ PCA cho các trục vuông góc $\Rightarrow$ các thành phần không chia sẻ thông tin (bài 1).
numpy: $(1,1)/\sqrt{2}$, $(-1,1)/\sqrt{2}$: đúng hai trục giải tay, chuẩn hoá về độ dài 1.

Bẫy lớn nhất: quay và trượt

R quay 90°: nghĩ bằng HÌNH trước. Xoay 90° đưa mọi trục sang trục vuông góc với nó $\Rightarrow$ không trục nào bất biến. Đại số chỉ xác nhận:

trace 0, det 1: $\lambda^2 + 1 = 0$, biệt thức $-4 < 0 \Rightarrow$ không nghiệm thực.

numpy KHÔNG báo lỗi: trả $\pm i$, lặng lẽ đổi sang complex.

Như API trả 200 OK với body rỗng: không tín hiệu đỏ, dữ liệu hổng chảy xuôi.
Luôn kiểm .imag trước khi tin eig trên ma trận không đối xứng.

Có đủ eigenvalue, vẫn thiếu eigenvector

$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (shear): $(\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ kép.
 $S - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = 0$: CHỈ một trục (1, 0). $\text{rank}(S - I) = 1$.
 $\text{eig}(S)$ trả $V = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2.2e-16 \end{bmatrix}$: hai cột song song, $\det(V) \approx 0$.
Shear giữ trục hoành, trượt mọi thứ khác. Gọi là defective.

ma trận	eigenvalue	số trục	chéo hoá?
A $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	3, 2	2	có
B $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	3, 1	2	có, trục giao
R quay 90°	$\pm i$ (phức)	0	không
S shear	1, 1 (kép)	1	không

Bỏ qua được: ý nghĩa hình học của eigenvalue phức (quay + co giãn).

Chéo hoá được $\neq$ khả nghịch

Strang: "Diagonalizability depends on enough eigenVECTORS.

Invertibility depends on nonzero eigenVALUES."

ma trận	λ	chéo hoá	khả nghịch
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	0, 0	$\times$	$\times$
$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	3, 3	$\times$	$\checkmark$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	1, 0	$\checkmark$	$\times$
I	1, 1	$\checkmark$	$\checkmark$

Cả bốn ô của bảng chân trị đều có người ở.

$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$: det 9, nghịch đảo thoải mái, vẫn chỉ một trục (= S nhân 3).

$\Rightarrow$ "khả nghịch nên chắc chéo hoá được" SAI.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$: chiếu lên trục x, det 0, nhưng ĐÃ là đường chéo.

$\Rightarrow$ "suy biến nên chắc không chéo hoá được" cũng SAI.

Quy tắc đủ hai vế

λ lặp $\rightarrow$ CÓ THỂ thiếu trục $\rightarrow$ phải đi ĐẾM, không đoán (l có λ lặp vẫn chéo).

λ khác nhau đôi một $\rightarrow$ LUÔN đủ trục $\rightarrow$ chéo hoá được, khỏi đếm.

eig luôn trả V đủ n cột, kể cả khi defective.

Kiểm `matrix_rank(V)`, đừng kiểm `V.shape`: "chạy được, số sai lạng lẽ".

Trong cơ sở eigenvector: ĐƯỜNG CHÉO

Bài 6: $A' = P^{-1}AP$ với P tùy ý. Bài 7 chọn khéo: cột của P = eigenvector.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = [[0.5, 0.5], [0.5, -0.5]] \quad (\det P = -2)$$

$$B P = [[3, 1], [3, -1]]$$

$$P^{-1}(B P) = [[3, 0], [0, 1]] = \text{diag}(3, 1)$$

Ma trận đường chéo không trộn các tọa độ với nhau.

Mỗi trục nhân đúng một số: n phép nhân vô hướng chạy song song.

Phép biến đổi không phức tạp. Cơ sở chuẩn $\hat{i}, \hat{j}$ mới là thứ TỰ TIỆN:

B trông rồi vì ta nhìn qua hệ tọa độ chẳng liên quan gì tới nó.

Như index: dữ liệu và truy vấn không đổi, chỉ cách tổ chức đổi.

Chạy trên $x = (5, 1)$

$$P^{-1}x = (3, 2) \Rightarrow x = 3 \cdot (1, 1) + 2 \cdot (1, -1)$$

$$\text{Áp } B: \text{ chỉ nhân từng tọa độ với } \lambda \text{ của nó: } (3 \cdot 3, 1 \cdot 2) = (9, 2)$$

$$\Rightarrow 9 \cdot (1, 1) + 2 \cdot (1, -1) = (11, 7)$$

$$\text{Đối chiếu: } B \cdot (5, 1) = (10 + 1, 5 + 2) = (11, 7) \checkmark$$

Một đường đi qua ma trận, một đường chỉ nhân hai số.

Khử Gauss PHÁ trị riêng

Tam giác $\Rightarrow$ đọc đường chéo: chỉ đúng cho CHÍNH ma trận đó, không cho U.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, khử có đổi hàng ra U:

	giá trị
trị riêng thật của A	-0.372281, 5.372281
đường chéo của U	3.0, 0.666667
tích đường chéo U	2.0
$\det(A)$	-2.0 (lệch dấu: một lần đổi hàng)

Khử Gauss bảo toàn $\det$ (tích), KHÔNG bảo toàn từng trị riêng.

Phân tích nào sống sót qua A^k ?

$A = LU \Rightarrow A^2 = LU \cdot LU \leftarrow U \text{ và } L \text{ không triệt tiêu: tắc}$

$A = SAS^{-1} \Rightarrow A^2 = S \wedge (S^{-1}S) \wedge S^{-1} = S \wedge^2 S^{-1} \checkmark$

$A^8 = \begin{bmatrix} 165751 & 241570 \\ 362355 & 528106 \end{bmatrix}, \|S \wedge^8 S^{-1} - A^8\| = 1.16e-10$

(số lớn $\Rightarrow$ sai số tuyệt đối lớn theo, bình thường, không phải bug)

phân tích	để	vì sao
LU (khử Gauss)	GIẢI $Ax = b$	ẻ, ổn định
$S \wedge S^{-1}$ (chéo hoá)	LẬP $A^k x$	$S^{-1}S$ triệt tiêu

$\det$ ẻ vì chỉ cần TÍCH các trụ; eig đắt vì cần từng giá trị.

Bài 8 ($M^k p$), RNN cuộn L bước: đều dùng $S \wedge^k S^{-1}$, không chỗ nào dùng LU.

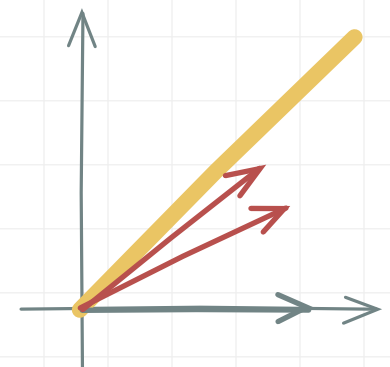
Luỹ thừa: λ lớn nhất nuốt tất cả

$B^k = P D^k P^{-1}$: các $P^{-1}P$ ở giữa triệt tiêu; D^k chỉ là nâng từng số.

$$B^{10} = P \cdot \text{diag}(59049, 1) \cdot P^{-1} = [[29525, 29524], [29524, 29525]] = ((3^{10} \pm 1)/2)$$

$O(k \cdot n^3)$ nhân lặp $\rightarrow O(n^3)$ chéo hoá một lần + $O(n)$ cho D^k .

k	$B^k \cdot (1, 0)$	cos với trục (1,1)
1	(2, 1)	0.9486832981
2	(5, 4)	0.9938837347
3	(14, 13)	0.9993148338
5	(122, 121)	0.9999915326
10	(29525, 29524)	0.9999999999



$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 \Rightarrow B^k x_0 = c_1 \cdot 3^k \cdot v_1 + c_2 \cdot 1^k \cdot v_2$$

3^k bùng nổ, 1^k đứng im: thành phần v_2 bị nhấn chìm về tỉ lệ.

Sau vài chục vòng, hướng kết quả là hướng v_1 , bất kể xuất phát từ đâu.

Toàn bộ cơ chế của PageRank.

$|\lambda_1|$ quyết định hội tụ VỀ ĐÂU.

$|\lambda_2| / |\lambda_1|$ quyết định hội tụ NHANH cỡ nào.

Power iteration: nhân $M @ x$ rồi chuẩn hoá, lặp k lần. 5 dòng code.

Xem trước bài 8: $\lambda = 1$

$M = [[0.9, 0.5], [0.1, 0.5]]$: mỗi CỘT cộng lại = 1 (xác suất bảo toàn).

trace 1.4, det 0.4: $\lambda^2 - 1.4\lambda + 0.4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.4$

$\lambda_1 = 1$ KHÔNG trùng hợp: mọi ma trận tổng cột bằng 1 đều có $\lambda = 1$.

$M - I = [[-0.1, 0.5], [0.1, -0.5]] \Rightarrow y = 0.2x \Rightarrow v = (1, 0.2)$

chuẩn hoá tổng = 1: $\pi = (5/6, 1/6) = (0.833333, 0.166667)$, $M\pi = \pi \checkmark$

bước	p (từ (1, 0))	sai lệch so với π
1	(0.9, 0.1)	0.0666667
2	(0.86, 0.14)	0.0266667
3	(0.844, 0.156)	0.0106667
4	(0.8376, 0.1624)	0.0042667
6	(0.834016, 0.165984)	0.00068267
10	(0.833351, 0.166649)	0.00001748
12	(0.833336, 0.166664)	0.00000280

Mỗi bước sai lệch nhân đúng $0.4 = \lambda_2$.

$0.0666667 \times 0.4 = 0.0266667 \checkmark$

Phân phối dừng = eigenvector ứng với $\lambda = 1$: vector duy nhất mà "chạy thêm một bước lan truyền" cũng không làm nó đổi. λ_2 cho biết cần bao nhiêu vòng.
Bài 8: làm trên đồ thị thật, kèm hệ số damping.

Nối vào AI

PageRank / PPR

Điểm xếp hạng = eigenvector chính ($\lambda = 1$) của ma trận chuyển tiếp.

Cả web xếp hạng bằng một phép nhân ma trận lặp (bài 8).

$|\lambda_2| / |\lambda_1|$

Quyết định số vòng lặp để hội tụ.

Con số nhìn khi tuning thuật toán lan truyền trên đồ thị.

PCA

Trục chính = eigenvector của hiệp phương sai; λ = phương sai giữ lại.

Hiệp phương sai đối xứng $\Rightarrow$ trục trực giao (bài 9, môn 6).

Transformer sâu

Phổ của các ma trận trộn token giải thích vì sao

biểu diễn token bị kéo về cùng một hướng khi tăng độ sâu.

Gradient

$|\lambda_{\max}| > 1 \Rightarrow$ nổ; $< 1 \Rightarrow$ tắt.

Gốc của việc chuẩn hoá / clip gradient trong mạng hồi quy.

SVD

Chéo hoá là ca riêng (vuông) của $A = U\Sigma V^T$.

SVD làm được cả ma trận không vuông: low-rank, LoRA (bài 9).

Bài 1 góc, bài 2 biến đổi, bài 6 đổi cơ sở, bài 7: có MỘT cơ sở đặc biệt làm phép biến đổi chỉ còn phép nhân số; đối xứng thì cơ sở đó còn trực giao.

Tự kiểm, rồi mới sang bài 8

- 1. Vì sao BẮT BUỘC chèn I? Vì sao $v \neq 0$ dẫn tới $\det(A - \lambda I) = 0$? (bằng hình)
- 2. $A = [[3,1],[0,2]]$ đọc ra 3, 2 bằng mắt. Quy tắc cho lớp nào? Vì sao đúng?
- 3. R không có eigenvector thực: một câu bằng hình; chỗ nào trong đa thức?
- 4. S có λ thực (kép) vẫn không chéo hoá được. Điều kiện thật là gì?
- 5. v là eigenvector với $\lambda = 3$ thì $-7v$ là gì? Eigenvector là vector hay tập?
- 6. B có trục trục giao, A thì không. Tính chất gì? Tên định lý? Nối PCA.
- 7. Chứng minh $B^k = P D^k P^{-1}$ trong 2 dòng; vì sao lặp thì chạy về $|\lambda|$ lớn nhất?
- 8. $\lambda_2 = 0.4$ so với $\lambda_2 = 0.95$: cần nhiều hơn bao nhiêu vòng? (logarit)

Câu 4 tách người biết công thức khỏi người hiểu điều kiện. Chọn một: câu 7.

Việc tay bắt buộc (không mở máy)

- 1. Chéo hoá $C = [[4,1],[2,3]]$ (trace 7, det 10): tìm λ , P, nhân ra $P^{-1}CP$.
- 2. λ là eigenvalue của $A \Rightarrow \lambda^k$ là eigenvalue của A^k , cùng eigenvector. Ba dòng.
- 3. $[[2,0],[0,2]]$ có eigenvalue gì? Eigenvector là những vector nào?

Mẹo tập 15 (3B1B)

$m = \text{trace}/2$, $p = \det$, $\lambda = m \pm \sqrt{m^2 - p}$. Dấu của $m^2 - p =$ biệt thức.

ma trận	m	p	λ
A	2.5	6	3, 2
B	2	3	3, 1
R	0	1	$m^2 - p = -1$: không thực
M	0.7	0.4	1, 0.4

Đáp nhanh

1. λ là số, A là ma trận: cần cùng kiểu. $A - \lambda I$ nghiêng một $v \neq 0$ về $0 \Rightarrow$ bóp dẹt $\Rightarrow$ diện tích $0 \Rightarrow \det = 0$.
2. Ma trận tam giác: $\det =$ tích đường chéo $\Rightarrow$ đã thức đã phân tích sẵn.
3. Xoay 90° chuyển mọi trục sang trục vuông góc. $\lambda^2 + 1 = 0$: biệt thức âm.
4. Đủ n trục ĐỘC LẬP (đếm số trục), không phải đủ eigenvalue.
5. Vẫn là eigenvector với $\lambda = 3$. Eigenvector là cả một trục (tập), không phải một mũi tên.
6. $B = B^T$: định lý phổ $\Rightarrow$ trục trục giao. Hiệp phương sai đối xứng $\Rightarrow$ thành phần chính vuông góc $\Rightarrow$ không tương quan.
7. $(PDP^{-1})^k = PD(P^{-1}P)D \dots DP^{-1} = PD^kP^{-1}$. $B^k x = \sum c_i \lambda_i^k v_i$: λ lớn nhất áp đảo.
8. Sai lệch $\sim \lambda_2^k \Rightarrow k \sim \log \varepsilon / \log \lambda_2$: $\log 0.4 / \log 0.95 \approx 17.9$ lần nhiều hơn.

Việc tay

1. $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 5)(\lambda - 2)$. $\lambda = 5$: $v = (1, 1)$; $\lambda = 2$: $v = (1, -2)$.
 $P = [[1, 1], [1, -2]] \Rightarrow P^{-1}CP = \text{diag}(5, 2)$.
2. $A^k v = A^{k-1}(\lambda v) = \lambda A^{k-1}v = \dots = \lambda^k v$.
3. $\lambda = 2$ (kép), và MỌI vector khác 0 đều là eigenvector: 2I giãn đều mọi hướng.
 Nối câu 5: "trục" không duy nhất khi λ lặp.