

Vứt một nửa, trả đúng σ_2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad U, S, V^T = \text{np.linalg.svd}(A)$$

$$S = [3, 1]$$

$$A_1 = \sigma_1 \cdot u_1 v_1^T = \begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 1.5 \end{bmatrix} \quad (\text{giữ ĐÚNG 1 giá trị})$$

$$\|A - A_1\| = 1.0$$

1.0 chính là σ_2 : giá trị bạn vừa vứt.

Vứt MỘT NỬA ma trận đi, sai số phải trả BẰNG ĐÚNG giá trị suy biến bị vứt.
Không xấp xỉ, không "khoảng chừng". Đó là toàn bộ bài 9 trong một dòng.

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ A & & A_1 \text{ (hạng 1)} \quad \quad A - A_1 \end{array}$$

$$A - A_1 = \sigma_2 \cdot u_2 v_2^T: \text{lớp thứ hai, hạng 1, "năng lượng"} \sigma_2^2 = 1.$$

Mục tiêu bài

Mọi ma trận = xoay $\rightarrow$ co giãn theo trục $\rightarrow$ xoay.

Vứt trục co giãn yếu nhất là cách nén TỐT NHẤT, có chứng minh (Eckart-Young).

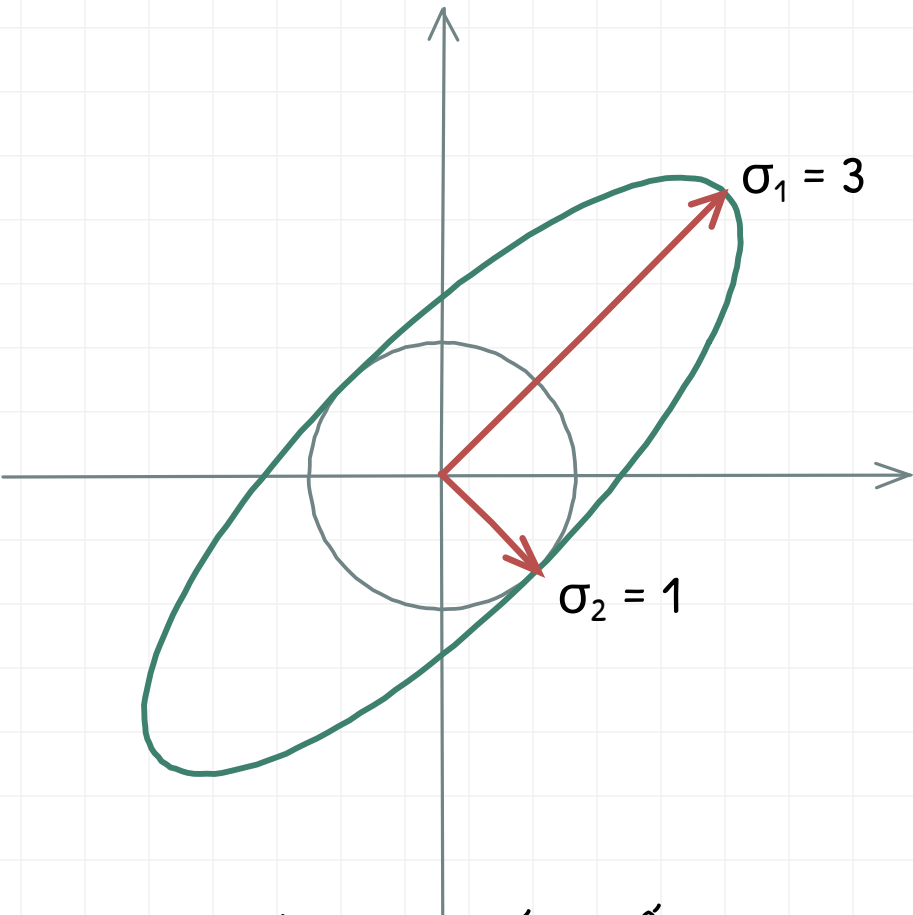
Không phải heuristic hay.

Xoay → co giãn → xoay

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

U, V trực giao (chỉ xoay/lật), Σ chéo: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$. MỌI ma trận $m \times n$.

bước	ma trận	làm gì (đọc phải → trái)
1	V^T	XOAY hệ trục đầu vào sang hệ "đúng"
2	Σ	CO GIÃN theo từng trục mới: trục $i \times \sigma_i$
3	U	XOAY kết quả sang hệ trục đầu ra



Đường tròn đơn vị
→ elip.
Nửa trục dài = σ_1 ,
nửa trục ngắn = σ_2 .

Quét 200.001 điểm:
 $\max \|Ax\| = 3.0$
 $\min \|Ax\| = 1.0$

σ_1 = hệ số phóng đại LỚN NHẤT ma trận gây ra (worst-case latency).
 $\sigma_1/\sigma_{\min}$ = số điều kiện: con số thư viện dùng để cảnh báo mất chữ số.

Ba bước. Không có bước thứ tư.

SVD so với chéo hoá (bài 7)

	chéo hoá $A = PDP^{-1}$	SVD $A = U\Sigma V^T$
vuông?	BẮT BUỘC	không cần (3×2 cũng chạy)
luôn tồn tại?	không	LUÔN, không ngoại lệ
P / U, V trực giao?	nói chung không	luôn
số ra	có thể phức	luôn thực, ≥ 0

Chéo hoá là API có thể ném exception. SVD không bao giờ ném.

Vì thế thực hành số học dùng SVD, kể cả khi cả hai đều chạy.

Cầu nối: $A^T A$

$$A = U\Sigma V^T \Rightarrow A^T A = V\Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T \quad (U^T U = I \text{ vì } U \text{ trực giao})$$

$A^T A$ đối xứng, và $V\Sigma^2 V^T$ CHÍNH LÀ chéo hoá của nó (bài 7, định lý phổ).

$\sigma_i = \sqrt{(\text{eigenvalue của } A^T A)}$

1. Tính $A^T A$, tìm eigenvalue λ_i (máy móc bài 7), đặt $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.
2. Eigenvector của $A^T A$ (chuẩn hoá) = cột của V .
3. $u_i = A \cdot v_i / \sigma_i$ cho từng $\sigma_i > 0$.

Tính tay thì tốt. Cài máy thì đừng dựng $A^T A$ (tờ 12).

Tính tay $A = [[2,1],[1,2]]$

1. $A^T A = [[5, 4], [4, 5]]$

$[[5,4],[4,5]] \cdot (1, 1) = (9, 9) = 9 \cdot (1, 1)$

$[[5,4],[4,5]] \cdot (1, -1) = (1, -1) = 1 \cdot (1, -1)$

$\Rightarrow \lambda = 9, 1 \Rightarrow \sigma_1 = 3, \sigma_2 = 1$

2. $v_1 = (1, 1)/\sqrt{2}, v_2 = (1, -1)/\sqrt{2}$

3. $u_1 = A \cdot v_1 / \sigma_1 = (3, 3)/\sqrt{2} / 3 = (1, 1)/\sqrt{2}$

$u_2 = A \cdot v_2 / \sigma_2 = (1, -1)/\sqrt{2}$

Ở đây $U = V$ vì A đối xứng: ca đặc biệt, đừng tưởng luôn vậy.

Ba phép kiểm chéo, làm luôn

đẳng thức	kiểm	đọc là
$ \det A = \prod \sigma_i$	$3 = 3 \times 1 \checkmark$	$\det$ = tích co giãn (bài 4)
$\ A\ _F^2 = \sum \sigma_i^2$	$\sqrt{10} = 3.1623 \checkmark$	"năng lượng" chia cho các trục
$\text{hạng} = \text{số } \sigma \neq 0$	$2 = 2 \checkmark$	định nghĩa sạch nhất của hạng

Bốn ma trận mốc

A	σ	đọc là
$[[3,0],[0,2]]$	3, 2	đã chuẩn sẵn, $U = V = I$
$[[0,-1],[1,0]]$ quay	1, 1	trục giao $\Leftrightarrow$ mọi $\sigma = 1$
$[[1,0],[0,0]]$ chiếu	1, 0	một trục $\times 0 \Rightarrow$ hạng 1
$[[1,2],[2,4]]$	5, 0	hạng 1 (tờ 6)

Bẫy dấu, và bài tay bắt buộc

`np.linalg.svd([[2,1],[1,2]])` trả:

$$U = \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

$$V^T = \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

Cột đầu của U là $(-0.7071, -0.7071)$, không phải $(0.7071, 0.7071)$. Bạn KHÔNG sai: đổi dấu cả u_i lẫn v_i thì $\sigma_i \cdot u_i v_i^T$ không đổi (hai dấu âm triệt tiêu).

Đừng so U , V từng phần tử với numpy. So σ và bản tái tạo $U\Sigma V^T$.

Nguồn lỗi số 1 khi tự cài SVD, và nó KHÔNG phải bug.

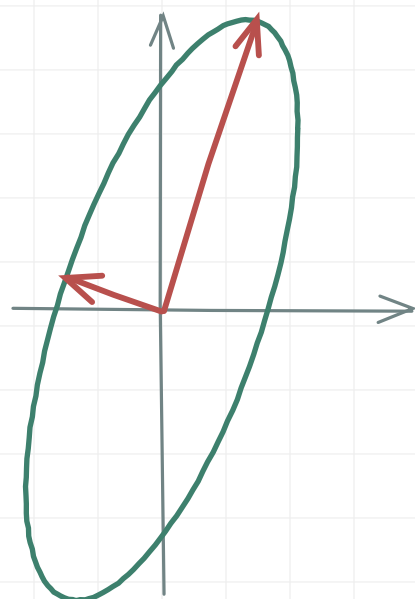
Tự làm: $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Ba bước như tờ 3, không mở máy. Rồi đối chiếu:

$$C^T C = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{bmatrix} \quad \lambda = 45, 5$$

$$\sigma = 3\sqrt{5} \approx 6.7082, \quad \sqrt{5} \approx 2.2361$$

$$\det C = 15; \text{ kiểm: } 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot 5 = 15 \quad \checkmark$$



ảnh đường tròn qua C
hai nửa trục: 6.71 và 2.24

Hạng = số σ khác 0

$B = [[1,2],[2,4]]$ (bài 3): $B^T B = [[5,10],[10,20]]$, $\lambda = 25, 0 \Rightarrow \sigma = 5, 0$

$v_1 = u_1 = (1, 2)/\sqrt{5}$: $\sigma_1 \cdot u_1 v_1^T = 5 \cdot (1/5) \cdot [[1,2],[2,4]] = B$ CHÍNH XÁC

$B = (1, 2)^T \cdot (1, 2)$: bốn số chỉ chứa HAI số thông tin. $\|B\|_F = 5 = \sigma_1$.

Hạng có/không; phổ σ trả lời BAO NHIÊU.

σ nhỏ nhưng khác 0 = "gần phụ thuộc": thứ định nghĩa bằng cột độc lập không đo được.

Hạng hàng = hạng cột (trả nợ bài 3)

$A = U \Sigma V^T \Rightarrow A^T = V \Sigma U^T$: CHUNG một $\Sigma \Rightarrow$ cùng số $\sigma \neq 0 \Rightarrow$ cùng hạng.

Không phải hai đại lượng tình cờ bằng nhau: một đại lượng đọc từ hai phía.

Hạng thấp $\neq$ ma trận nhỏ

G 50×50 , $G[i, j] = i + j$: 2500 số.

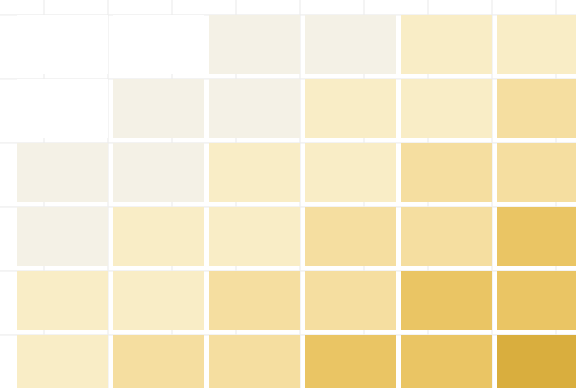
$\text{hạng}(G) = 2$, $\sigma = 2646.7067, 196.7067, 0, 0, \dots$

Vì $G = i \cdot 1^T + 1 \cdot j^T$: tổng của HAI tích ngoài.

Kích thước = khả năng CHỨA.

σ = nội dung thật đang chứa.

Như bảng 200 cột mà 198 cột suy ra được từ 2 cột kia.

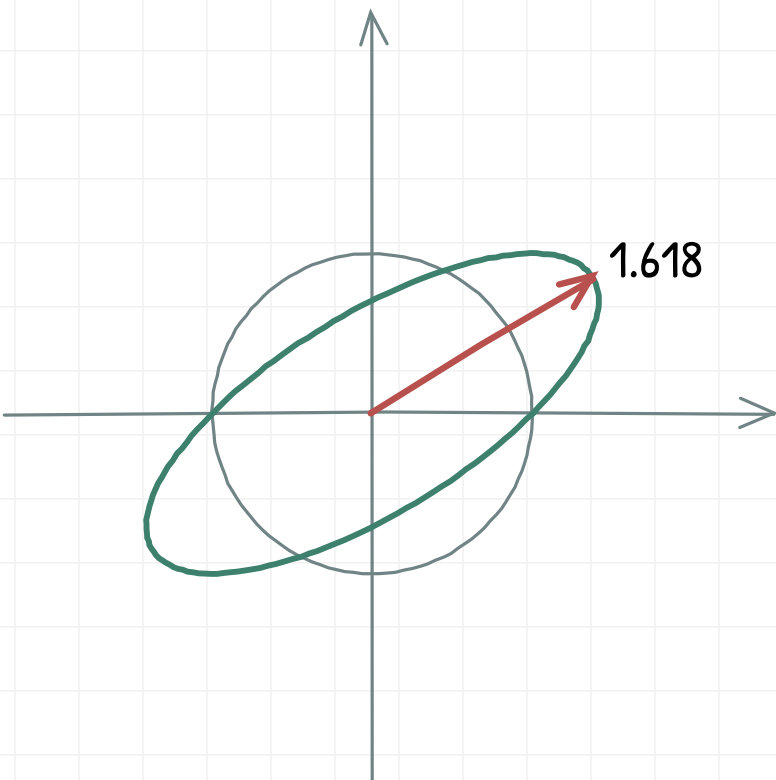


góc 6×6 của G

$\sigma \neq \text{eigenvalue}$: chỗ eigenvalue nói dối

Phép trượt $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (bài 2): eigenvalue = 1, 1 $\rightarrow$ "không co giãn gì"?
Nhìn hình đi: nó rõ ràng KÉO giãn. Eigenvalue nói dối.

$S^T S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\lambda = 0.382, 2.618 \Rightarrow \sigma = 1.618, 0.618$
 $1.618 = (1 + \sqrt{5})/2$ tỉ số vàng, $0.618 =$ nghịch đảo. $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = 1 = |\det S| \checkmark$



Kéo dài 1.618 lần theo một hướng,
nén 0.618 lần theo hướng vuông góc.
Vào nghiêng 58.28° , ra nghiêng 31.72° .

Eigenvector của S trùng nhau (hạng 1):
bài 7 bó tay. SVD vẫn sạch sẽ.

Quay 90° : eigenvalue $\pm i$ (phức);
 $\sigma = 1, 1$: "chỉ xoay, không co giãn".

	eigenvalue	singular value
trả lời	hướng nào KHÔNG đổi?	hướng nào giãn MẠNH nhất?
phép trượt	1, 1: vô dụng	1.618, 0.618: đúng
phép quay	$\pm i$: khó đọc	1, 1: đọc ngay
luôn tồn tại	không	có

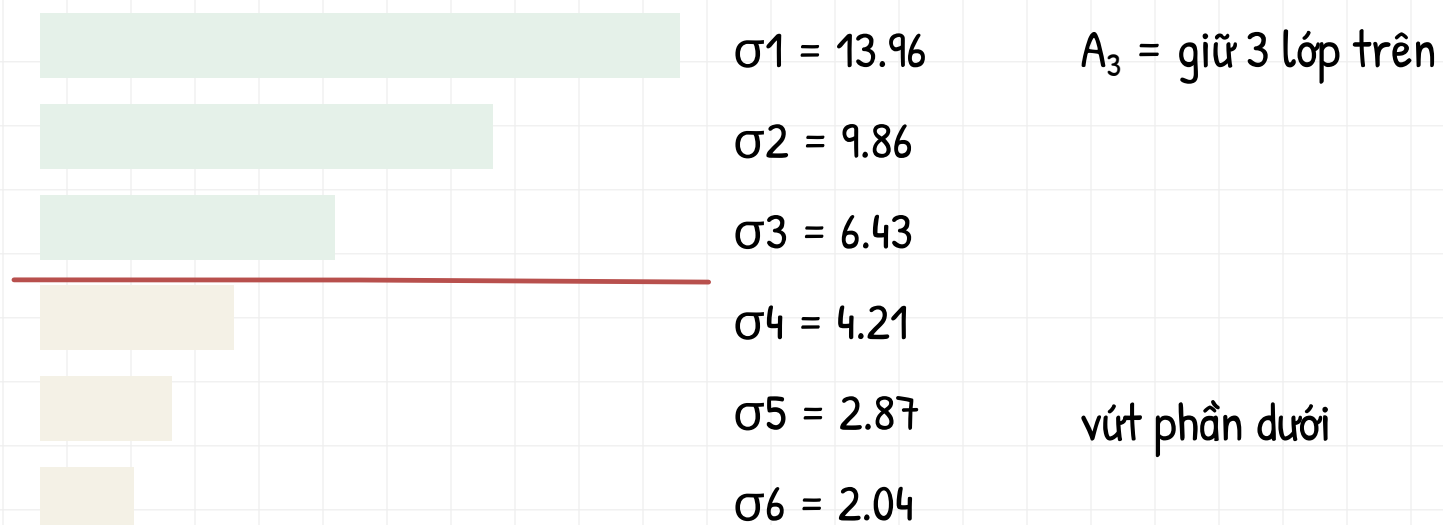
Ngoại lệ: ma trận đối xứng nửa xác định dương thì hai thứ trùng nhau: chỗ PCA sống.

Cắt = nén: truncated SVD

$$A = \sigma_1 \cdot u_1 v_1^T + \sigma_2 \cdot u_2 v_2^T + \dots + \sigma_r \cdot u_r v_r^T \quad (\text{mỗi số hạng hạng 1})$$

Một chồng lớp hạng 1, đã xếp sẵn theo quan trọng giảm dần.

SVD không "tính" ra điều mới: nó SẮP XẾP thứ có sẵn.



$$A_k = \sigma_1 \cdot u_1 v_1^T + \dots + \sigma_k \cdot u_k v_k^T \quad (\text{hạng đúng bằng } k)$$

Lưu $m \times n$ số gốc, hay k vector u (m số) + k vector v (n số) + k số σ :
 $k \cdot (m + n + 1)$. Với 50×50 : $k \cdot 101$ so với 2500.

Chỉ có lãi khi $k < mn / (m + n + 1)$.

50×50 : hoà vốn tại $k = 24.75 \Rightarrow$ giữ 25 thành phần là đã LỖ (101 % dung lượng).

1000×1000 : hoà vốn $k \approx 499$. Gốc $O(mn)$, nén $O(k(m + n))$: thắng khi $k \ll \min(m, n)$.

Ma trận càng to, thắng càng đậm. Ma trận vuông nhỏ gần như không đáng.

Nén thật: $M[i, j] = \exp(-|i - j| / 8)$

50 mục xếp thứ tự, càng gần càng giống (attention thiên lệch cục bộ, tương quan chuỗi).
Hạng ĐẦY ĐỦ 50, $\|M\|_F = 19.241815$. σ đầu: 13.96, 9.86, 6.43, 4.21, 2.87, 2.04, ...

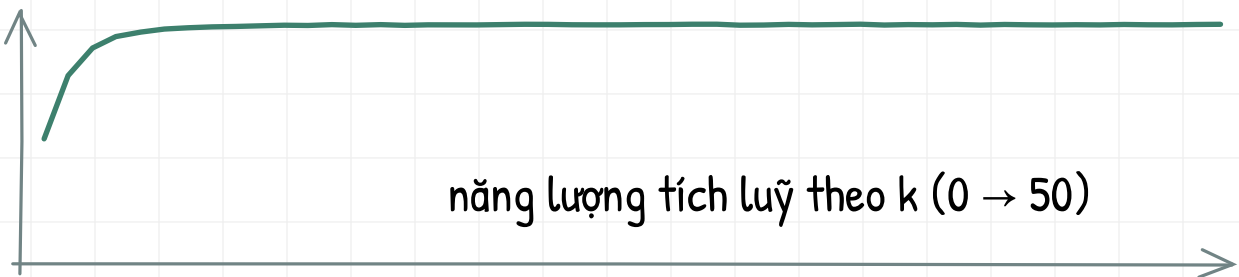
k	sai số tương đối	năng lượng giữ	dung lượng
1	0.6884	52.607 %	4.04 %
2	0.4595	78.887 %	8.08 %
5	0.1718	97.048 %	20.20 %
10	0.0676	99.543 %	40.40 %
20	0.0280	99.922 %	80.80 %
25	0.0215	99.954 %	101.00 %

← đã lỗi

Giữ 5/50 thành phần (10 %): còn 97.048 % năng lượng.

Đó là câu trả lời cho "SVD nén theo nghĩa nào".

mục tiêu năng lượng	k cần	dung lượng
90 %	3	12.12 %
95 %	5	20.20 %
99 %	8	32.32 %
99.9 %	19	76.76 %



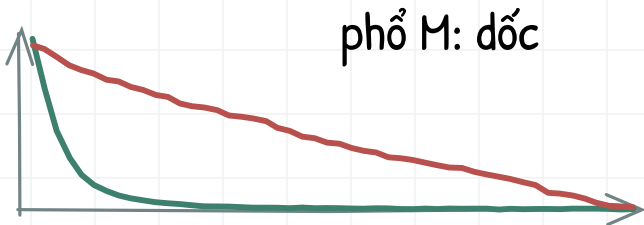
Đối chứng: nhiều KHÔNG nén được

$N = \text{default_rng}(7).\text{normal}(\text{size}=(50, 50))$: mỗi ô ngẫu nhiên độc lập.
 σ đầu: 13.410, 13.127, 12.465, 11.828, ... σ nhỏ nhất 0.2062. PHẪNG lì.

k	sai số tương đối	năng lượng
1	0.9624	7.39 %
5	0.8250	31.95 %
10	0.6772	54.13 %
25	0.3210	89.70 %

90 % năng lượng cần $k = 26 \Rightarrow 105.04\%$ dung lượng: nén xong TO HƠN gốc.

phổ nhiều: phẳng



SVD không nén gì cả. DỮ LIỆU mới nén được.

SVD chỉ tìm ra chỗ nén và đo nó. gzip không làm file nhỏ đi: sự lặp lại trong file mới làm. Đưa gzip /dev/urandom thì nó phình ra.
Phổ σ là báo cáo "dữ liệu nén được tới đâu", đọc được TRƯỚC khi nén.

Eckart–Young: tham lam LÀ tối ưu

Trong MỌI ma trận B có hạng $\leq k$, A_k làm $\|A - B\|$ nhỏ nhất (Frobenius và phổ).
 $\|A - A_k\|_F = \sqrt{\sigma^2_{k+1} + \sigma^2_{k+2} + \dots}$, $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$

M ở tờ 9, $k = 5$: $\|M - M_5\|_F = 3.306109 = \sqrt{(\sum_{i=6} \sigma_i^2)}$; $\|M - M_5\|_2 = 2.043938 = \sigma_6 \checkmark$

Đối thủ 1: chọn nhầm 5 lớp

giữ thành phần	sai số Frobenius	
1, 2, 3, 4, 5	3.306109	↑ SVD cắt
1, 2, 3, 4, 6	3.870598	
1, 2, 3, 4, 50	4.376678	
1, 2, 3, 5, 6	4.947285	
2, 3, 4, 5, 6	14.196036	

Đối thủ 2: 20.000 không gian con ngẫu nhiên

Mỗi không gian lấy xấp xỉ tốt nhất bên trong nó (chiếu trực giao).
tốt nhất 16.23, SVD 3.31 $\Rightarrow$ SVD hơn kẻ may mắn nhất 4.9 lần.

Bài gốc: ALS 30 lần khởi đầu, 400 vòng: cả 30 lần về đúng 3.306109.

Tham lam CHÍNH LÀ tối ưu, có chứng minh.

Như một query planner chứng minh được luôn ra kế hoạch rẻ nhất.
 σ_{k+1} là TRẦN LỖI đọc được trước: không cần thử, nhìn phổ. Đo thay vì đoán.

Tự cài: power iteration + bóc tách

Dùng lại đúng power iteration của bài 8:

1. lặp $v \leftarrow R^T(R v)$, chuẩn hoá $\Rightarrow v$ hội tụ về v_1
2. $\sigma = \|R v\|$, $u = R v / \sigma$
3. bóc tách: $R \leftarrow R - \sigma \cdot u v^T$, lặp lại cho lớp sau

Tự cài khớp numpy: [3, 1] cho A, và 10 σ đầu của M lệch $< 1e-8$.

Ba nghi phạm khi lệch numpy

1. dấu u/v: KHÔNG phải bug (tờ 5).
2. số vòng quá ít khi hai σ liên nhau gần bằng nhau:
hội tụ theo $(\sigma_{i+1}/\sigma_i)^2$, σ sát nhau thì bò rất chậm.
3. sai chỉ số khi bóc tách.

Viết $R^T(R v)$, dùng dụng $(R^T R) v$.

$\text{cond}(A^T A) = \text{cond}(A)^2$: $A = [[2,1],[1,2]]$ cond 3 $\rightarrow A^T A$ cond 9.

cond $1e6 \rightarrow 1e12$: ăn 12 trong ~ 16 chữ số của float64.

Công thức 3 bước: tốt để TÍNH TAY, tệ để CÀI MÁY.

SVD đầy đủ tốn $O(mn \cdot \min(m, n)) = O(n^3)$ với ma trận vuông.

$100k \times 100k$ thì không tưởng $\Rightarrow$ randomized / truncated SVD chỉ tìm k lớp đầu.

Nối vào AI

PCA = trừ trung bình, rồi SVD, rồi gọi V là trục chính. Ba dòng.

300 điểm tâm (50, -20): $S^2/(n-1) = [10.209, 0.3804] = \text{eigenvalue}$ của hiệp phương sai.
 $v_1 = \pm(0.9341, 0.3571)$. QUÊN trừ: $v_1 = (0.9287, 0.3709)$ bám hướng TRUNG BÌNH (0.9280, 0.3725).

LoRA d	r	B, A	tỉ lệ
4096	8	65.536	0.3906 %
4096	16	131.072	0.7812 %
4096	64	524.288	3.1250 %
1024	8	16.384	1.5625 %

Giả thiết ngầm: ΔW có phổ ĐỐC. Phổ phẳng như nhiều $\Rightarrow$ LoRA hỏng. r chính là k.

MLA (kiểu DeepSeek-V2, 60 lớp, 128 đầu): KV cache 1.966.080 $\rightarrow$ 34.560 số/token = 1.758 %;
100k token fp16: 393.22 GB $\rightarrow$ 6.912 GB. Cache một latent nhỏ, dựng lại K, V từ nó.
Embedding 1 triệu $\times$ 768 $\rightarrow$ 128 chiều: 16.68 % dung lượng (+ V 0.393 MB). Nhớ chiều cả query.

Attention (T = 64, d_head = 8, seed 0): $\text{hạng}(QK^T/\sqrt{d}) = 8 \leq d_{\text{head}}$; softmax phá hạng thấp (hạng 53) nhưng 8 σ đầu vẫn giữ $\sim 61\%$ năng lượng $\Rightarrow$ móng của linear attention, Linformer.

Gradient: nhân 40 lớp, mỗi lớp = 0.9 hay 1.1 $\times$ trực giao $\Rightarrow \sigma_1 = 0.9^{40} = 1.48e-02$ (tắt)
hoặc $1.1^{40} = 45.3$ (nổ). $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$: vanishing là bài toán σ (môn 3).

PCA, LoRA, MLA: cùng một ý "giữ k trục lớn".

Khác ở chỗ ma trận nén được TÍNH bằng SVD hay được HỌC.

Nhìn lại môn 2: chín bài dựng nên gì

bài 1 dot đo góc, phép chiếu cho cái bóng
 cosine; §7 = chiếu lên không gian con tốt nhất

bài 2 ma trận là động từ, cột = nơi cơ sở đáp
 mạng nơ-ron bắt buộc cần phi tuyến

bài 3 hạng = số chiều thật của ảnh
 → số σ khác 0

bài 4 $\det = 0$ = bóp dẹp
 → $|\det| = \prod \sigma_i$, một $\sigma = 0$ là đủ dẹp

bài 5 ma trận không vuông, embedding
 → SVD chạy trên mọi $m \times n$

bài 6 đổi cơ sở, $Q^{-1} = Q^T$
 → SVD = đổi sang V , co giãn, đổi sang U

bài 7 eigenvector: hướng không đổi
 → $\sigma_i = \sqrt{\lambda(A^T A)}$; khi nào eigenvalue nói dối

bài 8 Markov, power iteration
 → dùng lại để tự cài SVD

bài 9 SVD, hạng thấp
 gom cả tám bài = cách nén TỐT NHẤT

Xong môn khi: trả lời 7 câu "tận cùng" ở README môn 2 §6, và PageRank tự viết khớp `nx.pagerank` sai số $< 1e-6$ trên ít nhất 3 đồ thị (capstone).

Tự kiểm: trả lời được mới xong môn 2

1. Xoay $\rightarrow$ co giãn $\rightarrow$ xoay ứng với U, Σ, V thế nào? Vì sao đọc phải $\rightarrow$ trái?
2. Vì sao $\sigma_i = \sqrt{\text{eigenvalue của } A^T A}$? 2 dòng; chỗ nào dùng U trực giao?
3. Trượt: eigenvalue 1, 1, singular value 1.618, 0.618. Số nào đúng? Số nào đối?
4. Nhiễu 50×50 cần $k = 26$ cho 90 % năng lượng (105 % dung lượng).
Câu "SVD là thuật toán nén" sai ở đâu? Phát biểu lại.
5. Eckart-Young: hai hệ quả thực dụng (khỏi tìm kiếm; biết trước sai số).
6. LoRA thêm 0.39 % tham số: giả thiết ngầm về ΔW ? Sai thì hỏng ở đâu?
7. PCA quên trừ trung bình: vì sao v_1 bám hướng trung bình? (ngôn ngữ SVD)
8. $G[i, j] = i + j$ có hạng 2: chứng minh một dòng bằng tích ngoài.

Câu 4 là câu sâu nhất của cả môn 2. Câu 3 và 6 đáng thứ nhì.

Ba bài tay bắt buộc

1. SVD tay của $C = [[3,0],[4,5]]$ đủ ba bước; chỉ số σ và bản tái tạo.
2. Nén một ảnh xám thật: bảng $k = 1, 5, 20, 50, 100$ như tờ 9. k nào mất không phân biệt được? Điểm hoà vốn $mn/(m + n + 1)$ của ảnh đó?
3. Dựng một ma trận phổ phẳng và một phổ dốc; cấu trúc nào làm phổ dốc?

3B1B KHÔNG có tập nào về SVD. Nguồn chính: MML ch.4 §4.5, §4.6.

Xem lại tập 13, 14; tập 16 (Abstract vector spaces) là phần thưởng cuối môn.

Môn 3: chain rule qua nhiều lớp = nhân chuỗi Jacobian; vanishing = bài toán σ .

Đáp nhanh

1. V^T xoay đầu vào, Σ co giãn theo trục, U xoay ra. $Ax = U(\Sigma(V^T x))$: V^T chạy trước.
2. $A^T A = V \Sigma U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^2 V^T$ ($U^T U = I$) $\Rightarrow$ chéo hoá $A^T A$, eigenvalue = σ^2 .
3. σ : phép trượt THẬT kéo giãn 1.618 lần. Eigenvalue chỉ nói không trục nào đổi hướng, không nói gì về bóp méo.
4. SVD không tạo khả năng nén: nó PHÁT HIỆN và ĐO khả năng nén có sẵn trong dữ liệu. Phổ phẳng $\Rightarrow$ không có gì để nén.
5. Không cần tìm kiếm/tối ưu: cắt k lớp đầu là xong. Sai số = $\sigma_{\{k+1\}}$ (phổ) hoặc $\sqrt{\sum \sigma_i^2}$ còn lại (Frobenius), đọc trước khi cắt.
6. ΔW cần thiết có phổ dốc: vài σ đầu gánh gần hết. Phổ phẳng $\Rightarrow r$ nhỏ mất phần lớn năng lượng, fine-tune không học được.
7. Không trừ $\Rightarrow \sigma_1$ đo khoảng cách đám điểm tới GỐC: hướng lớn nhất là hướng tới tâm, không phải hướng phương sai.
8. $G = i \cdot 1^T + 1 \cdot j^T$: tổng hai ma trận hạng 1 $\Rightarrow$ hạng ≤ 2 (và = 2 vì $i, 1$ độc lập).

Bài tay 1

$C^T C = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{bmatrix}$: eigenvector $(1,1), (1,-1) \Rightarrow \lambda = 45, 5$.

$\sigma_1 = 3\sqrt{5} \approx 6.7082, \sigma_2 = \sqrt{5} \approx 2.2361; v_1 = (1,1)/\sqrt{2}, v_2 = (1,-1)/\sqrt{2}$.

$u_1 = C \cdot v_1 / \sigma_1 = (3, 9) / (\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5}) = (1, 3) / \sqrt{10}; u_2 = C \cdot v_2 / \sigma_2 = (3, -1) / \sqrt{10}$.

$\sigma_1 \sigma_2 = 15 = \det C \checkmark$